BỘ CÔNG THƯƠNG
TRƯỜNG CAO ĐẲNG HOÁ CHẤT
Trương Minh Chính

TOÁN CAO CẤP

Dùng cho sinh viên Cao đẳng ngành Kinh tế

(Lưu hành nội bộ)

NHÀ XUẤT BẢN LAO ĐỘNG - XÃ HỘI

BỘ CÔNG THƯƠNG
TRƯỜNG CAO ĐẲNG HOÁ CHẤT

Trương Minh Chính

TOÁN CAO CẤP

Dùng cho sinh viên hệ cao đẳng ngành kinh tế

(Tài liệu lưu hành nội bộ)

NHÀ XUẤT BẢN LAO ĐỘNG - XÃ HỘI

Mã số: $\dfrac{54 - 113}{5 - 5}$

LỜI NÓI ĐẦU

Cuốn bài giảng này được biên soạn theo chương trình đào tạo dành cho sinh viên cao đẳng ngành Kinh tế trường Cao đẳng hoá chất. Nội dung bao gồm các kiến thức cơ bản nhất về hàm số một biến số, nhiều biến số cũng như phép tính vi tích phân của hàm số một biến số và các ứng dụng của chúng trong phân tích kinh tế. Ngoài ra, bài giảng còn cung cấp những kiến thức cơ bản về đại số tuyến tính như không gian véc tơ, ma trận, định thức, hệ phương trình tuyến tính tổng quát và sau mỗi chương đều có phần bài tập để giúp sinh viên rèn luyện và củng cố phần lý thuyết đã học.

Tác giả xin chân thành cảm ơn các giảng viên Bộ môn Toán khoa Khoa học Cơ bản, đặc biệt là đồng chí Trần Đình Thi đã đọc bản thảo và cho nhiều ý kiến đóng góp hết sức bổ ích để tác giả hoàn thành việc biên soạn bài giảng này.

Tác giả mong nhận được ý kiến đóng góp của độc giả và các đồng nghiệp để cuốn bài giảng đáp ứng ngày càng tốt hơn cho mục tiêu đào tạo của nhà trường.

Phú Thọ, tháng 3 năm 2008

Tác giả

MỤC LỤC

Chương 1. HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ

§1. Một số khái niệm về hàm số

1. Biến số

1.1. Khái niệm biến số

Trong tất cả các lĩnh vực khoa học. chúng ta thường gặp các đại lượng đo bằng số. Khi nghiên cứu quy luật thay đổi giá trị của các đại lượng đó, người ta thường dùng chữ để ký hiệu số đo của chúng. Chẳng hạn, trong hình học người ta thường dùng chữ S để ký hiệu diện tích. Với mỗi hình phẳng, S là một số thực. Người ta gọi S là một biến số hình học. Trong ngôn ngữ hình thức của toán học, từ biến số được hiểu như sau:

Định nghĩa. Biến số là một ký hiệu mà ta có thể gán cho nó một số bất kỳ thuộc tập $X \neq \phi$ cho trước ($X \subset R$).

Tập hợp X được gọi là miền biến thiên của biến số đó. Mỗi số thực $x \in X$ được gọi là giá trị của biến số x.

Từ biến số nhiều khi được gọi tắt là biến và thường được ký hiệu bởi các chữ cái x, y, z,...Thông thường người ta chỉ xét các biến số mà miền biến thiên của nó có ít nhất hai số. Một biến số chỉ nhận một giá trị duy nhất được gọi là hằng số.

Trong giải tích toán học ta thường xét các biến số thay đổi giá trị một cách liên tục, với miền biến thiên là một khoảng số. Các khoảng số được ký hiệu như sau:

Khoảng đóng: $[a;b] = \{x | a \le x \le b\}$

Khoảng mở: $(a;b) = \{x | a < x < b\}$

Các khoảng nửa mở: $[a;b) = \{x | a \le x < b\}$, $(a;b] = \{x | a < x \le b\}$

1.2. Các biến số kinh tế

Trong lĩnh vực kinh tế người ta thường quan tâm đến các đại lượng như giá cả, lượng cung, lượng cầu, doanh thu, chi phí, thu nhập quốc dân,…Khi phân tích xu hướng thay đổi giá trị của các đại lượng đó theo không gian, thời gian và theo các điều kiện khác nhau, các nhà kinh tế xem chúng như các biến số. Các biến số đó được gọi là biến số kinh tế.

Trong các tài liệu kinh tế, người ta thường ký hiệu các biến số kinh tế bằng các chữ cái đầu các từ tiếng Anh mô tả các biến số đó. Dưới đây là một số ký hiệu thường gặp:

p: Giá hàng hoá (price);

Q_s: Lượng cung (Quantity Supplied);

Q_d: Lượng cầu (Quantity Demaned);

U: Lợi ích (Utility);

TC: Tổng chi phí (Total Cost);

TR: Tổng doanh thu (Total Revenue);

Y: Thu nhập quốc dân (National Income);

C: Tiêu dùng (Consumption).

2. Quan hệ hàm số

2.1. Định nghĩa hàm số.

Một hàm số f xác định trên tập hợp $X \subset R$ là một quy tắc cho tương ứng với mỗi số thực $x \in X$ với một và chỉ một số thực y.

Kí hiệu: $f: x \mapsto y = f(x)$ hoặc $y = f(x)$.

Tập hợp X được gọi là miền xác định của hàm số f.

Số thực y tương ứng với số x theo quy tắc f được gọi là giá trị của hàm số f tại điểm x. Kí hiệu là f(x).

Tập hợp tất cả các số thực y là giá trị của hàm số f tại ít nhất một điểm thuộc miền xác định của nó được gọi là miền giá trị của nó. Kí hiệu miền giá trị của hàm số f trên miền xác định X là:

$$f(X) = \{y \in R \mid \exists x \in X, f(x) = y\}$$

2.2. Các phương pháp cho hàm số

2.2.1. Phương pháp giải tích

Đây là phương pháp quan trọng nhất, phương pháp này nêu lên mối liên hệ giữa x và y bởi một công thức giải tích (tức là một đẳng thức giữa các biểu thức chứa những phép cộng, trừ, nhân, chia, luỹ thừa,...tác dụng lên x và y).

Ví dụ.

- $y = tg^2x - x^2 + 2$
- $y = \begin{cases} x & \text{khi } x \geq 0 \\ x^2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}, \ldots$

2.2.2. Phương pháp bảng

Mối liên hệ giữa x và y được cho bởi bảng các hàm số lượng giác, logarít, bảng các số liệu thực nghiệm.

2.2.3. Phương pháp đồ thị

Mối liên hệ giữa x và y được biểu diễn bởi một đường thẳng hoặc đường cong.

2.3. Quan hệ hàm số giữa các biến số

Trong các lĩnh vực khoa học người ta phân tích quy luật thay đổi giá trị của các đại lượng đo được bằng số dưới dạng các biến số có quan hệ với nhau. Sự thay đổi giá trị của biến số này kéo theo sự thay đổi giá trị của biến số kia theo một quy luật nhất định. Chẳng hạn, trong kinh tế chúng ta thấy khi giá hàng hoá thay đổi thì lượng hàng hoá mà người sản xuất muốn bán ra thị trường và lượng hàng hoá mà người mua bằng lòng mua cũng thay đổi theo. Khi thu nhập của các gia đình thay đổi thì lượng tiêu dùng của họ cũng thay đổi. Sự phụ thuộc của một biến số này vào một biến số khác thường được biểu diễn dưới dạng hàm số.

3. Hàm số ngược

Xét hàm số $y = f(x)$ với miền xác định X và miền giá trị $Y = f(X)$. Nếu với mỗi giá trị $y_0 \in Y$ chỉ tồn tại duy nhất một giá trị $x_0 \in X$ sao cho $f(x_0) = y_0$, tức là phương trình $f(x) = y_0$ có nghiệm duy nhất x_0 trong miền X, thì:

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \text{ với } x \in X, y \in Y$$

(trong đó kí hiệu $x_0 = f^{-1}(y_0)$ chỉ nghiệm duy nhất của phương trình $f(x) = y_0$).

Ta gọi hàm số $x = f^{-1}(y)$ là hàm số ngược của hàm số $y = f(x)$.

Ví dụ.

- Hàm số $y = x^3$ với miền xác định(MXĐ) R có hàm số ngược là hàm số $x = \sqrt[3]{y}$

- Hàm số y = sinx với MXĐ $X = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ có hàm số ngược là hàm số x = arcsiny , $y \in [-1;1]$.
- Hàm số y = cosx với MXĐ $X = [0;\pi]$ có hàm số ngược là hàm số x = arccosy , $y \in [-1;1]$.
- Hàm số y = tgx với MXĐ $X = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ có hàm số ngược là hàm số x = arctgy , $y \in R$.
- Hàm số y = cotgx với MXĐ $X = (0;\pi)$ có hàm số ngược là hàm số x = arccotgy, $y \in R$.

Chú ý. Do trong toán học người ta thường dùng kí hiệu x để chỉ biến số độc lập, y để chỉ biến số phụ thuộc nên trong thực tế thay cho cách viết hàm số ngược dưới dạng $x = f^{-1}(y)$ người ta thay đổi vai trò của x và y cho nhau, tức là $y = f^{-1}(x)$.

Ví dụ.

- Hàm số $y = \sqrt[3]{x}$ là hàm số ngược của hàm số $y = x^3$.
- Hàm số $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) có hàm số ngược là $y = \log_a x$

4. Một số đặc trưng hàm số

4.1. Hàm số đơn điệu

Định nghĩa.

Hàm số f(x) được gọi là hàm đơn điệu tăng trên khoảng X nếu với mọi $x_1, x_2 \in X$ mà $x_1 < x_2$ ta có $f(x_1) < f(x_2)$.

Hàm số f(x) được gọi là hàm đơn điệu giảm trên khoảng X nếu với mọi $x_1, x_2 \in X$ mà $x_1 < x_2$ ta có $f(x_1) > f(x_2)$.

Hàm số đơn điệu tăng (đơn điệu giảm) còn được gọi là hàm số đồng biến (nghịch biến).

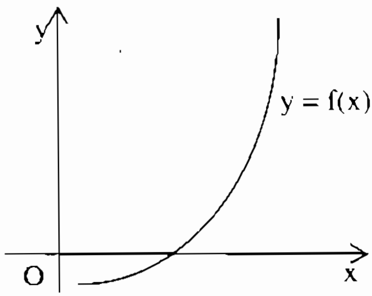
Ví dụ. Hàm số $f(x) = x^2$ là hàm số đơn điệu tăng trên khoảng $[0; +\infty)$ và đơn điệu giảm trên khoảng $(-\infty; 0]$ vì:

$$x_1, x_2 \in [0; +\infty), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = x_1^2 < f(x_2) = x_2^2$$

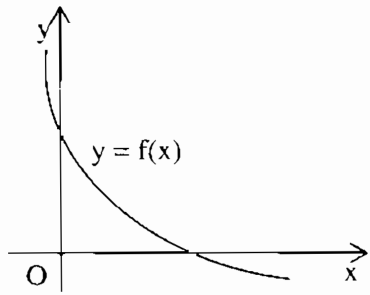
$$x_1, x_2 \in (-\infty; 0], x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = x_1^2 > f(x_2) = x_2^2$$

Chú ý.

i. Đồ thị hàm số đơn điệu tăng là một đường cong đi lên, đồ thị hàm số đơn điệu giảm là một đường cong đi xuống.



Hàm số đơn điệu tăng



Hàm số đơn điệu giảm

ii. Hàm số f(x) được gọi là tăng nghiêm ngặt (giảm nghiêm ngặt) trên khoảng X nếu với mọi $x_1, x_2 \in X$ mà $x_1 < x_2$ ta có $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$).

4.2. Hàm số bị chặn

Định nghĩa.

Hàm số f(x) được gọi là bị chặn trên trong khoảng X nếu với mọi $x \in X$ tồn tại một số M sao cho $f(x) \leq M$.

Hàm số f(x) được gọi là bị chặn dưới trong khoảng X nếu với mọi $x \in X$ tồn tại một số m sao cho $f(x) \geq m$.

Hàm số f(x) được gọi là bị chặn trong khoảng X nếu f(x) vừa bị chặn trên và vừa bị chặn dưới trong X.

Ví dụ.

- Hàm số $f(x) = x^2 + 1$ là hàm số bị chặn dưới vì $f(x) = x^2 + 1 \geq 1$ với mọi $x \in R$.
- Hàm số $f(x) = -x^2 + 2$ là hàm số bị chặn trên vì $f(x) = -x^2 + 2 \leq 2$ với mọi $x \in R$.
- Hàm số f(x) = sinx là hàm số bị chặn vì $|\sin x| \leq 1, \forall x \in R$.

4.3. Hàm số chẵn, hàm số lẻ

Định nghĩa.

Hàm số f(x) xác định trên tập X được gọi là hàm số chẵn nếu với mọi $x \in X$ ta có $-x \in X$ và $f(-x) = f(x)$.

Hàm số f(x) xác định trên tập X được gọi là hàm số lẻ nếu với mọi $x \in X$ ta có $-x \in X$ và $f(-x) = -f(x)$.

Ví dụ.

- Hàm số $f(x) = x^2$ là hàm số chẵn
- Hàm số $f(x) = x^3$ là hàm số lẻ

Chú ý. Đồ thị của hàm số chẵn và hàm số lẻ có tính chất đối xứng, cụ thể là đồ thị hàm số chẵn nhận trục tung là trục đối xứng còn đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ là tâm đối xứng.

4.4. Hàm số tuần hoàn

Định nghĩa. Hàm số f(x) xác định trên tập X được gọi là hàm số tuần hoàn nếu tồn tại số dương T sao cho với mọi $x \in X$ ta luôn có:

$$\begin{cases} x \pm T \in X \\ f(x \pm T) = f(x) \end{cases}$$

Chú ý. Số dương T nhỏ nhất thoả mãn điều kiện trên được gọi là chu kỳ của hàm số.

Ví dụ.

Các hàm số sinx, cosx là hàm số tuần hoàn với chu kỳ T $= 2\pi$ vì $\sin(x + 2\pi) = \sin x$. $\cos(x + 2\pi) = \cos x$, $\forall x \in R$.

Các hàm số tgx, cotgx là hàm số tuần hoàn với chu kỳ T $= \pi$ vì $tg(x + \pi) = tgx$. $cotg(x + \pi) = cotgx$, $\forall x \in R$.

4.5. Hàm số hợp

Định nghĩa. Cho hàm số $y = f(u)$, trong đó $u = g(x)$. Khi đó ta nói y là hàm số hợp của biến số x thông qua hàm số trung gian u, kí hiệu là $y = f[g(x)]$.

Ví dụ Hàm số $y = \sin^5 x$ là hàm số hợp của x thông qua hàm số trung gian $u = \sin x$.

5. Các hàm số sơ cấp cơ bản và các phép toán sơ cấp đối với hàm số

5.1. Các hàm số sơ cấp cơ bản

- Hàm số luỹ thừa $f(x) = x^\alpha$, α là hằng số;
- Hàm số mũ $f(x) = a^x$, $a > 0$ và $a \neq 1$;
- Hàm số logarit $f(x) = \log_a x$, $a > 0$ và $a \neq 1$;
- Các hàm số lượng giác $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \mathrm{tg}x$, $f(x) = \mathrm{cotg}x$;
- Các hàm số lượng giác ngược $f(x) = \arcsin x$, $f(x) = \arccos x$, $f(x) = \mathrm{arctg}x$, $f(x) = \mathrm{arccotg}x$.

5.2. Các phép toán sơ cấp đối với hàm số

Các phép toán cộng, trừ, nhân, chia và phép lấy hàm số hợp: Được thực hiện giống như đối với các biểu thức đại số.

Nếu f(x), g(x) là các hàm số cho dưới dạng biểu thức thì các biểu thức f(x) + g(x), f(x) - g(x), f(x).g(x), $\frac{f(x)}{g(x)}$ được gọi tương ứng là tổng, hiệu, tích, thương của f(x) và g(x).

Ví dụ.

- Hàm số $y = 3x + 7^x$ là tổng của hai hàm số f(x) = 3x và $g(x) = 7^x$.
- Hàm số $y = \frac{x^2 + \sin x}{\log_3 x}$ là thương của hai hàm số $f(x) = x^2 + \sin x$ và $g(x) = \log_3 x$

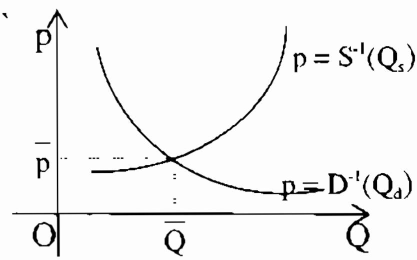
6. Các mô hình hàm số trong phân tích kinh tế

6.1. Hàm cung và hàm cầu

Khi phân tích thị trường hàng hoá và dịch vụ, các nhà kinh tế sử dụng khái niệm hàm cung $Q_s = S(p)$ và hàm cầu $Q_d = D(p)$ (trong đó p là giá của hàng hoá, Q_s là lượng cung tức là lượng hàng hoá mà người bán bằng lòng bán ở mức giá p, Q_d là lượng cầu tức là lượng hàng hoá mà người mua bằng lòng mua ở mức giá p) để biểu diễn sự phụ thuộc của lượng cung và lượng cầu của một lượng hàng hoá vào giá của hàng hoá đó. Tất nhiên, lượng cung và lượng cầu không chỉ phụ thuộc vào yếu tố giá cả mà còn phụ thuộc vào nhiều yếu tố khác như thu nhập, giá của các hàng hoá khác liên quan,...do đó, ở đây ta chỉ xem xét hàm cung và hàm cầu với giả thiết là các yếu tố khác không thay đổi.

Đối với hàng hoá thông thường thì hàm cung là hàm số đơn điệu tăng, hàm cầu là hàm số đơn điệu giảm, tức là với các yếu tố khác không đổi, khi giá hàng hoá tăng người thì người bán sẽ muốn bán được nhiều hàng còn người mua sẽ mua ít đi. Người ta gọi đồ thị của hàm cung và hàm cầu là đường cung và đường cầu, điểm giao nhau giữa đường cung và đường cầu được gọi là điểm cân bằng của thị trường, tức là ở mức giá $\overline{p}$ thì $Q_s = Q_d = \overline{Q}$. Nghĩa là người bán sẽ bán hết và người mua sẽ mua đủ, thị trường sẽ không còn hiện tượng dư thừa hoặc khan hiếm hàng hoá.

Chú ý. Để biểu diễn đồ thị của hàm cung và hàm cầu trên mặt phẳng tọa độ, người ta qui ước trục hoành để biểu diễn lượng Q, trục tung để biểu diễn giá p. Cách qui ước như vậy tương ứng với việc biểu diễn đồ thị của hai hàm số ngược $p = S^{-1}(Q_s)$ và $p = D^{-1}(Q_d)$ của hàm cung và hàm cầu.



6.2. Hàm sản xuất ngắn hạn

Các nhà kinh tế học sử dụng khái niệm hàm sản xuất để mô tả sự phụ thuộc của sản lượng hàng hoá của một nhà sản xuất vào các yếu tố đầu vào của sản xuất (gọi là yếu tố đầu vào) như vốn, lao động, vật tư,...

Trong kinh tế học khái niệm ngắn hạn và dài hạn không được xác định bằng một khoảng thời gian cụ thể mà được hiểu như sau:

Ngắn hạn là khoảng thời gian mà ít nhất một trong các yếu tố sản xuất không thể thay đổi, dài hạn là khoảng thời gian mà tất cả các yếu tố sản xuất có thể thay đổi

Khi phân tích sản xuất, người ta thường quan tâm tới hai yếu tố sản xuất là vốn, lao động kí hiệu là K và L.

Trong ngắn hạn thì K không thay đổi nên hàm sản xuất ngắn hạn có dạng Q = f(L), trong đó L là lượng lao động được sử dụng và Q là mức sản lượng tương ứng.

6.3. Hàm doanh thu, hàm chi phí và hàm lợi nhuận

Tổng doanh thu, tổng chi phí và tổng lợi nhuận của nhà sản xuất phụ thuộc vào sản lượng hàng hoá. Khi phân tích sản xuất, cùng với hàm sản xuất các nhà kinh tế còn sử dụng các hàm số sau:

6.3.1. Hàm doanh thu là hàm số biểu diễn sự phụ thuộc của tổng doanh thu (kí hiệu là TR) vào sản lượng (kí hiệu là Q).

$$TR = TR(Q)$$

chẳng hạn, tổng doanh thu của nhà sản xuất cạnh tranh là hàm bậc nhất $TR = pQ$ với p là giá sản phẩm trên thị trường.

6.3.2. Hàm chi phí là hàm số biểu diễn sự phụ thuộc của tổng chi phí sản xuất (kí hiệu là TC) vào sản lượng (kí hiệu là Q).

$$TC = TC(Q)$$

6.3.3. Hàm lợi nhuận là hàm số biểu diễn sự phụ thuộc của tổng chi phí sản xuất (kí hiệu là π) vào sản lượng (kí hiệu là Q).

$$\pi = \pi(Q)$$

Chú ý. Hàm lợi nhuận có thể xác định được thông qua hàm doanh thu và hàm chi phí.

$$\pi = TR(Q) - TC(Q)$$

6.4. Hàm tiêu dùng

Lượng tiền mà người tiêu dùng dành để mua sắm hàng hoá và dịch vụ phụ thuộc vào thu nhập. Các nhà kinh tế sử dụng hàm tiêu dùng để biểu diễn sự phụ thuộc của biến tiêu dùng C vào biến thu nhập Y.

$$C = f(Y)$$

Chú ý. Theo quy luật chung, khi thu nhập tăng người ta có xu hướng tiêu dùng nhiều hơn do đó hàm tiêu dùng là hàm đồng biến.

§2. Giới hạn hàm số

1. Các định nghĩa

Định nghĩa 1. Số A được gọi là giới hạn của hàm số f(x) khi x → a nếu khoảng cách giữa f(x) và A có thể thu hẹp một cách tuỳ ý bằng cách thu hẹp tương ứng khoảng cách từ x đến a, tức là với mọi số $\varepsilon > 0$ bé tuỳ ý, bao giờ cũng tìm được tương ứng một số $\delta > 0$ sao cho bất đẳng thức $|f(x) - A| < \varepsilon$ được thoả mãn khi x thuộc miền xác định của hàm số và $0 < |x - a| < \delta$.

Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ hoặc f(x) → A khi x → a.

Định nghĩa 2. Ta nói hàm số f(x) có giới hạn là A khi $x \to \infty$ nếu với mọi số $\varepsilon > 0$ cho trước nhỏ tuỳ ý, tồn tại một số M sao cho với mọi x mà $|x| > M$ thì ta luôn có $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ hoặc f(x) → A khi x → ∞.

Ví dụ. Chứng minh $\lim\limits_{x \to 2}(3x - 1) = 5$

Thật vậy, ta có $|f(x) - 5| = |(3x - 1) - 5| = 3|x - 2|$.

với mọi số $\varepsilon > 0$ bé tuỳ ý ta chọn $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$. Khi $|x - 2| < \delta$ ta luôn có $|f(x) - 5| = 3|x - 2| < 3\delta = \varepsilon$.

Vậy theo định nghĩa ta có điều phải chứng minh.

2. Giới hạn một phía

Trong định nghĩa nêu trên ta xét chúng ta xét quá trình $x \to a$ không phân biệt $x > a$ hay $x < a$. Khi xem xét giới hạn, nhiều khi ta phải xét riêng hai quá trình với ký hiệu như sau:

- Quá trình $x \to a$ với $x > a$, ký hiệu là là $x \to a^+$
- Quá trình $x \to a$ với $x < a$, ký hiệu là là $x \to a^-$

Giới hạn của hàm số f(x) khi $x \to a^+$ và $x \to a^-$ được gọi tương ứng là giới hạn bên phải và giới hạn bên trái của hàm số f(x) tại điểm a, kí hiệu tương ứng là $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$.

Định lí. Điều kiện cần và đủ để $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ là

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = A$.

Ví dụ. Xét giới hạn của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$ tại điểm $x = 0$.

Ta có $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} = 0$, $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} = 1$. Vậy theo định lí, hàm số không tồn tại giới hạn tại $x = 0$.

3. Một số định lí về giới hạn của hàm số

Định lí 1 (Tính duy nhất của giới hạn hàm số).

Giới hạn của hàm số f(x) khi $x \to a$ (nếu có) là duy nhất.

Định lí 2 (Các phép toán trên giới hạn của hàm số)

Nếu các hàm số f(x) và g(x) đều có giới hạn khi $x \to a$ thì:

$$\lim_{x \to a}\left[f(x) \pm g(x)\right] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \lim_{x \to a} f(x).\lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} \quad \left(\lim_{x \to a} g(x) \neq 0\right)$$

Định lí 3. Giả sử ba hàm số f(x), g(x) và h(x) thoả mãn bất đẳng thức

$$f(x) \le g(x) \le h(x) \text{ với } x \in (a: b)$$

Khi đó, nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$.

§3. Đại lượng vô cùng bé và vô cùng lớn

1. Đại lượng vô cùng bé

1.1. Định nghĩa. Đại lượng $\alpha(x)$ được gọi là một vô cùng bé (VCB) khi $x \to a$ nếu $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$.

Ví dụ.

- $\alpha(x) = x - 1$ là một VCB khi $x \to 1$.
- Các đại lượng sinx, tgx là VCB khi $x \to 0$.

Chú ý.

- Mọi hằng số $C \neq 0$ đều không thể là một VCB.
- Hai đại lượng $\alpha(x), \beta(x)$ được gọi là VCB đồng thời nếu chúng là các VCB trong cùng một điều kiện $x \to a$.

1.2. So sánh các VCB

Định nghĩa 1. Cho $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB đồng thời khi $x \to a$. Ta nói $\alpha(x)$ là VCB bậc cao hơn $\beta(x)$ khi $x \to a$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$.

Để nói rằng $\alpha(x)$ là VCB bậc cao hơn $\beta(x)$ khi $x \to a$ ta viết $\alpha(x) = 0[\beta(x)]$.

Ví dụ. $\alpha(x) = 1 - \cos x$ là VCB bậc cao hơn $\beta(x) = 2x$ khi $x \to 0$

Nhận xét. Từ định nghĩa ta dễ dàng suy ra các mệnh đề sau:

- Nếu $\alpha(x) = 0[\beta(x)]$ thì $a.\alpha(x) = 0[\beta(x)]$ (a là hằng số)
- Nếu $\alpha(x) = 0[\beta(x)]$ và $\gamma(x) = 0[\beta(x)]$ thì $\alpha(x) \pm \gamma(x) = 0[\beta(x)]$, $\alpha(x).\gamma(x) = 0[\beta(x)]$.

Ví dụ. Với k > 0, khi $x \to 0$ ta có $\beta(x) = a_1x^{k+1} + a_2x^{k+2} + \ldots + a_px^{k+p} = 0[x^k]$.

Định nghĩa 2. Ta nói $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB cùng bậc khi $x \to a$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k \neq 0$

Đặc biệt khi k = 1 ta nói $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB tương đương, kí hiệu là $\alpha(x) \sim \beta(x)$ khi $x \to a$.

Ví dụ.

- $\alpha(x) = 1 - \cos x$ và $\beta(x) = x^2/2$ là hai VCB tương đương khi $x \to 0$.
- $\alpha(x) = \text{tg}ax$ và $\beta(x) = ax$ là hai VCB tương đương khi $x \to 0$.
- $\alpha(x) = \ln(1 + x)$ và $\beta(x) = x$ là hai VCB tương đương khi $x \to 0$.

1.3. Ứng dụng của VCB trong việc tìm giới hạn dạng vô định 0/0

Định lí. Giả sử khi $x \to a$ ta có các cặp VCB tương đương

$$\alpha(x) \sim \alpha_1(x) \text{ khi } x \to a,\ \beta(x) \sim \beta_1(x) \text{ khi } x \to a$$

Khi đó nếu $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ tồn tại thì ta có:

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Chứng minh.

Ta có $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \dfrac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} \cdot \dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \cdot \dfrac{\beta_1(x)}{\beta(x)}$. chuyển qua giới hạn khi $x \to a$ ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ.

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x + 4x^3}{1 - \cos x + 3x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{3x} = \dfrac{1}{3}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x + 2x}{4x + x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{4x} = \dfrac{1}{2}$

2. Đại lượng vô cùng lớn

2.1. Định nghĩa. Đại lượng $F(x)$ được gọi là một vô cùng lớn khi $x \to a$ nếu $\lim\limits_{x \to a} |F(x)| = +\infty$.

Ví dụ. Với $k > 0$ và $a \neq 0$ ta có:

- ax^k là một VCL khi $x \to +\infty$,
- ax^{-k} là một VCL khi $x \to 0$

2.2. Định lí (Mối liên hệ giữa đại lượng VCB và VCL)

Nếu $F(x)$ là một VCL khi $x \to a$ và $F(x) \neq 0$ thì $\alpha(x) = \dfrac{1}{F(x)}$ là một VCB khi $x \to a$. Ngược lại, nếu $\alpha(x)$ là một VCB khi $x \to a$ và $\alpha(x) \neq 0$ thì $F(x) = \dfrac{1}{\alpha(x)}$ là một VCL khi $x \to a$.

Ví dụ. $\alpha(x) = 1 - \cos x$ là một VCB khi $x \to 0$ thì $F(x) = \dfrac{1}{1 - \cos x}$ là một VCL khi $x \to 0$.

§4. Hàm số liên tục

1. Khái niệm hàm số liên tục

1.1. Hàm số liên tục tại một điểm

Cho hàm số f(x) xác định trong khoảng (a; b), ta nói rằng hàm số f(x) liên tục tại điểm $x_0 \in (a; b)$ nếu:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Hàm số f(x) không liên tục tại điểm x_0 được gọi là gián đoạn tại điểm ấy. Vậy x_0 là điểm gián đoạn của hàm số nếu x_0 không thuộc miền xác định của f(x) hoặc x_0 thuộc miền xác định của f(x) nhưng $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ hay không tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Chú ý.

i. Nếu x_0 thuộc miền xác định của hàm số và $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ ($\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$) thì ta nói hàm số f(x) liên tục phải (liên tục trái) tại x_0.

ii. Hàm số f(x) liên tục tại điểm x_0 khi và chỉ khi nó đồng thời liên tục phải và liên tục trái tại điểm x_0.

1.2. Hàm số liên tục trên một miền

Ta nói hàm số f(x) liên tục trên một miền $X \subset R$ nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc X.

Chú ý. Trong trường hợp X = [a; b] thì f(x) liên tục trên X nếu nó liên tục trên khoảng (a; b) và liên tục trái tại a, liên tục phải tại b.

Ví dụ.

- Hàm số f(x) = x liên tục với mọi x hữu hạn
- Hàm số $f(x) = \frac{1}{x-a}$ gián đoạn tại x = a vì tại x = a hàm số không xác định
- Hàm số $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{khi } x \le \frac{1}{2} \\ -1 & \text{khi } x > \frac{1}{2} \end{cases}$ gián đoạn tại $x = \frac{1}{2}$ vì

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = 1 \neq \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = -1$$

2. Các phép toán sơ cấp đối với các hàm số liên tục

Định lí 1. Nếu các hàm số f(x) và g(x) cùng liên tục tại điểm x thì:

- Các hàm số f(x) ± g(x) và f(x).g(x) liên tục tại điểm x_0
- Hàm số $\frac{f(x)}{g(x)}$ cũng liên tục tại điểm x nếu $g(x) \neq 0$

Định lí 2. Nếu hàm số $\varphi(x)$ liên tục tại điểm x_0 và hàm số f(u) liên tục tại điểm $u_0 = \varphi(x_0)$ thì hàm số hợp $f[\varphi(x)]$ liên tục tại điểm x_0.

3. Các tính chất của hàm số liên tục

Định lí 1. Cho hàm số f(x) xác định và liên tục trên khoảng I:=$(\alpha;\beta)$; cho a, b$\in$I và f(a)f(b) < 0. Khi đó tồn tại điểm $c\in(a;b)$ sao cho f(c) = 0.

Hệ quả. Nếu f(x) liên tục trên đoạn [a; b] và f(a).f(b) < 0 thì phương trình f(x) = 0 có ít nhất một nghiệm trong khoảng (a; b), tức là tồn tại ít nhất một điểm $c\in(a;b)$ sao cho f(c) = 0.

Định lí 2. Nếu hàm số f(x) liên tục tại điểm x_0 thì tại đó ta có $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim\limits_{x\to x_0} x\right)$.

Bài tập chương 1

1. So sánh các vô cùng bé sau

a. $\alpha(x) = \sin x, \beta(x) = x^2$ khi $x \to 0$

b. $\alpha(x) = 1 - \cos(\frac{\pi}{2} - x), \beta(x) = \cot g x$ khi $x \to \frac{\pi}{2}$

c. $\alpha(x) = \cos x - \sin x, \beta(x) = \cos 2x$ khi $x \to \frac{\pi}{4}$

2. Đoạn thẳng OP nối liền tâm O với điểm P ngoài đường tròn. Vẽ tiếp tuyến PT và từ T hạ đường vuông góc TN xuống OP. GỌi A là giao giữa OP với đường tròn. Chứng minh AP và AN là hai vô cùng bé tương đương khi $P \to A$.

3. Sử dụng ứng dụng của vô cùng bé tìm giới hạn các hàm số

a. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x + \sin^2 x}{\sin 2x - x^2}$ b. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$ c. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x + tg^2 x}{x.\sin x}$

d. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1+x)}$

4. Xét tính liên tục của các hàm số

a. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 4 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ b. $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ c. $f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

Chương 2

PHÉP TÍNH VI PHÂN CỦA HÀM SỐ MỘT BIẾN

§1. Đạo hàm

1. Khái niệm đạo hàm

1.1. Đạo hàm của hàm số tại một điểm

Giả sử hàm số y = f(x) xác định trên khoảng (a; b). Nếu xuất phát từ điểm $x_0 \in (a; b)$ ta cho biến độc lập thay đổi giá trị đến điểm $x \in (a; b)$ thì biến phụ thuộc y sẽ thay đổi giá trị từ $f(x_0)$ đến f(x). Hiệu $\Delta x = x - x_0$ chỉ lượng thay đổi giá trị của x, được gọi là số gia của đối số, còn hiệu số $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ chỉ lượng thay đổi giá trị tượng ứng của y được gọi là số gia tương ứng của hàm số.

Tỷ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ biểu diễn tốc độ biến thiên trung bình của biến số y khi biến x thay đổi giá trị từ x_0 đến x. Nếu tỷ số này có giới hạn hữu hạn khi $\Delta x \to 0$ thì giới hạn đó cho biết tốc độ biến thiên tức thời của hàm số tại điểm x_0.

Định nghĩa. Giới hạn (nếu có) của tỷ số $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ khi $\Delta x \to 0$ được gọi là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0. Kí hiệu là $y'(x_0)$ hoặc $f'(x_0)$.

Theo định nghĩa ta có:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Ví dụ 1. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x^2$ tại điểm x_0 bất kỳ.

Giải.

Cho x_0 số gia Δx, ta có $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \frac{(2x_0 + \Delta x)\Delta x}{\Delta x}$. Theo định nghĩa đạo hàm ta có $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(2x_0 + \Delta x) = 2x_0$.

Ví dụ 2. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sin x$ tại điểm x_0 bất kỳ.

Giải. Cho x_0 số gia Δx, ta có:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} =$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{2\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\cos\frac{x+x_0}{2}\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}=\cos x_0.$$

1.2. Đạo hàm một phía.

Giới hạn (nếu có) của tỷ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ khi $\Delta x\to 0^+$ được gọi là đạo hàm bên phải của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0, kí hiệu là $f'(x_0^+)$.

Theo định nghĩa ta có:

$$f'(x_0^+)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Tương tự,

$$f'(x_0^-)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

được gọi là đạo hàm bên trái của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0.

Định lí. Điều kiện cần và đủ để hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 là đạo hàm bên phải, đạo hàm trái của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 tồn tại và bằng nhau.

Tức là $f'(x_0) = k \Leftrightarrow f'(x_0^+) = f'(x_0^-) = k$

Ví dụ. Xét đạo hàm của hàm số $f(x) = |x|$ tại điểm $x_0 = 0$, ta có:

$$f'(x_0^+) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1,$$

$$f'(x_0^-) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1.$$

suy ra $f'(x_0^+) \neq f'(x_0^-)$ nên hàm số $f(x)$ không có đạo hàm tại điểm $x_0 = 0$.

1.3. Mối liên hệ giữa đạo hàm và tính liên tục của hàm số

Định lí. Nếu hàm số có đạo hàm tại điểm x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

Chứng minh.

Giả sử $f'(x_0)$ tồn tại, khi đó ta có:

$$\lim_{\Delta x \to 0}[f(x) - f(x_0)] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) = f'(x_0).0 = 0,$$

suy ra $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x) = f(x_0)$. Điều này chứng tỏ hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm x_0.

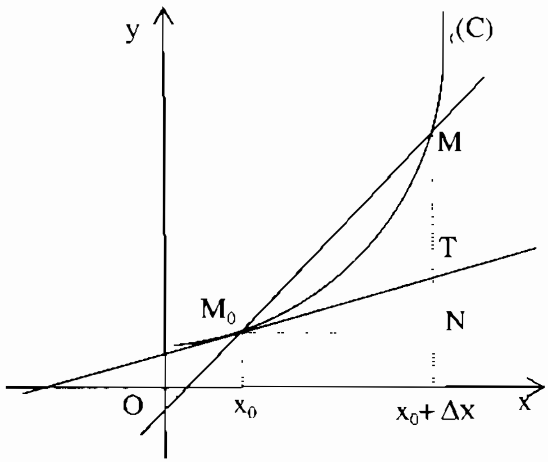
Chú ý. Định lí khẳng định hàm số liên tục tại tất cả các điểm mà tại đó nó có đạo hàm. Tuy nhiên, một hàm số liên tục tại một điểm thì chưa chắc đã có đạo hàm tại điểm đó. Chẳng hạn, hàm số $f(x) = |x|$ liên tục tại điểm $x = 0$ nhưng không có đạo hàm tại điểm đó.

1.4. Ý nghĩa hình học của đạo hàm.

Cho đường cong (C) có phương trình $y = f(x)$, trên (C) lấy $M_0(x_0; y_0)$ và $M(x_0 + \Delta x ; y_0 + \Delta y)$.

Gọi φ là góc giữa $\overline{M_0N}$ và $\overline{Ox}$ thì $\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\varphi$ chính là hệ số góc của dây cung M_0M. Khi $\Delta x \to 0$ M sẽ dần đến M_0 trên đường cong, dây cung M_0M sẽ trùng với tiếp tuyến M_0T và góc φ sẽ dần đến góc α, tức là ta có:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\varphi \to \alpha} tg\varphi = tg\alpha = f'(x_0).$$



Vậy, đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến với đường cong $y = f(x)$ tại điểm M_0 có hoành độ x_0.

2. Đạo hàm của các hàm số sơ cấp cơ bản

Để thực hiện việc tính toán đạo hàm, trước hết ta cần phải ghi nhớ các công thức đạo hàm của các hàm số sơ cấp cơ bản sau đây:

1. $(C)' = 0$	2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$; $(x)' = 1$	3. $(a^x)' = a^x.\ln a$; $(e^x)' = e^x$
4. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$; $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	5. $(\sin x)' = \cos x$	6. $(\cos x)' = -\sin x$
7. $(\text{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	8. $(\text{cotg}x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
10. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	11. $(\text{arctg}x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$	12. $(\text{arccotg}x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$

3. Các qui tắc tính đạo hàm

3.1. Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương các hàm số

Định lí. Nếu các hàm số $u = u(x)$, $v = v(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì tại điểm đó ta có:

i. $(u \pm v)' = u' \pm v'$

ii. $(c.u)' = c.u'$, c là hằng số bất kỳ.

iii. $(u.v)' = u'v + uv'$

iv. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, $(v \neq 0)$

Chứng minh.

Ta chứng minh công thức iii), các trường hợp còn lại chứng minh tương tự.

Đặt y = uv, khi đó tại điểm x_0 ta có:

$$\Delta y = u(x_0 + \Delta x).v(x_0 + \Delta x) - u(x_0).v(x_0) =$$

$$= [u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)].v(x_0 + \Delta x) + [v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)].u(x_0) =$$

$$= \Delta u.v(x_0 + \Delta x) + u(x_0).\Delta v$$

suy ra

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x} v(x_0 + \Delta x) + u(x_0)\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0)$$

Vậy đạo hàm của hàm số y = uv là $y' = u'v + uv'$.

Ví dụ 1. Cho $y = 3x^3 - 5x + 6$ thì $y' = 9x^2 - 5$

Ví dụ 2. Cho $y = (3x - 5)\sin x$ thì $y' = 3\sin x + (3x - 5)\cos x$

Ví dụ 3. Cho $y = \frac{3x^2}{\cos x}$ thì $y' = \frac{6x\cos x + 3x^2\sin x}{\cos^2 x}$

3.2. Đạo hàm của hàm số hợp

Định lí. Nếu hàm số $u = \varphi(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm tại điểm tương ứng $u_0 = \varphi(x_0)$ thì hàm hợp $y(x) = f(\varphi(x))$ có đạo hàm tại điểm x_0 được tính theo công thức

$$y'(x_0) = f'(u_0).\varphi'(x_0) \text{ hay } y'_x = y'_u.u'_x$$

Chứng minh.

Tại điểm x_0, nếu thay đổi giá trị của biến x một lượng Δx thì $u = \varphi(x)$ thay đổi một lượng tương ứng Δu, kéo theo $y = f(u)$ thay đổi một lượng Δy. Do hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm tại điểm x_0 nên ta có:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u_0) \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u_0) + \alpha(\Delta u), \tag{2.1.1}$$

trong đó $\alpha(\Delta u)$ là một vô cùng bé khi $\Delta u \to 0$.

Từ (2.1.1) suy ra $\Delta y = f'(u_0).\Delta u + \Delta u.\alpha(\Delta u) \Rightarrow$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0).\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}.\alpha(\Delta u)$$

Hàm số $u = \varphi(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 nên nó liên tục tại điểm đó. Khi $\Delta x \to 0$ thì $\Delta u \to 0$, do đó ta có:

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} . \lim_{\Delta u \to 0} \alpha(\Delta u)$$

$$= f'(u_0).u'(x_0) + u'(x_0).0 = f'(u_0).\varphi'(x_0).$$

Ví dụ. Hàm số $y = (3 - 5x)^6$ là hàm số hợp của hai hàm cơ bản là $y = u^6$ và $u = 3 - 5x$. Theo quy tắc tính đạo hàm của hàm số hợp ta có:

$$y' = (u^6)'.(3 - 5x)' = 6u^5.(-5) = -30(3 - 5x)^5.$$

Chú ý.

i. Định lí này có thể suy rộng cho trường hợp hàm số hợp nhiều lần, chẳng hạn $y = f(u)$, $u = \varphi(v)$, $v = \psi(x)$ thì

$y'_x = y'_u.u'_v.v'_x$

ii. Áp dụng qui tắc đạo hàm của hàm số hợp, nếu $u = \varphi(x)$ là một hàm số có đạo hàm thì đạo hàm của các hàm sơ cấp cơ bản được sử dụng như sau:

1. $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$	2. $(a^u)' = a^u.\ln a.u'$	3 $(e^u)' = e^u.u'$
4. $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u\ln a}$; $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$	5. $(\sin u)' = u'.\cos u$	6 $(\cos x)' = -u'\sin u$
7. $(\text{tg}u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$	8. $(\text{cotg}u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$	9. $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
10. $(\arccos x)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	11. $(\text{arctg}u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$	12. $(\text{arccotg}u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$

Ví dụ 1. $y = \sqrt{x^2 + 3}$ thì $y' = \dfrac{(x^2 + 3)'}{2\sqrt{x^2 + 3}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$

Ví dụ 2. $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 5})$ thì

$$y' = \frac{(x + \sqrt{x^2 + 5})'}{x + \sqrt{x^2 + 5}} = \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 5}}}{x + \sqrt{x^2 + 5}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 5}}$$

Ví dụ 3. Cho $y = \sin(\cos\dfrac{1}{x})$, đặt $y = \sin u$, $u = \cos v$, $v = \dfrac{1}{x}$ ta có:

$$y'_u = \cos u\,,\ u'_v = -\sin v\,,\ v'_x = -\frac{1}{x^2}.$$

Áp dụng công thức tính đạo hàm của hàm số hợp ta có:

$$y'_x = \cos u.(-\sin v).(-\frac{1}{x^2}) = \frac{1}{x^2}.\sin\frac{1}{x}.\cos(\cos\frac{1}{x})$$

3.3. Đạo hàm của hàm số ngược

Định lí. Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y'(x) \neq 0$ tại điểm x và có hàm số ngược $x = \varphi(y)$ liên tục tại điểm y tương ứng thì tại điểm y tương ứng ấy hàm số $x = \varphi(y)$ có đạo hàm ngược tính theo công thức $x'(y) = \dfrac{1}{y'(x)}$.

Chứng minh.

Ta có $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$ nên suy ra $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$

$\Leftrightarrow x'(y) = \frac{1}{y'(x)}$

Ví dụ. Cho hàm số y = arcsinx, tính y'.

Hàm số y = arcsinx, $x \in (-1; 1)$ có hàm số ngược là hàm số x = siny ($-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$) nên theo công thức tính đạo hàm của hàm số ngược ta có:

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

3.4. Đạo hàm của biểu thức luỹ thừa mũ và phương pháp logarit hoá

Giả sử ta phải tính đạo hàm của hàm số $y = u^v$, trong đó u = u(x), v = v(x) là các hàm số có đạo hàm và u(x) > 0. Để tính đạo hàm của hàm số $y = u^v$ ta áp dụng một trong hai phương pháp sau:

Phương pháp 1.

Ta có $y = e^{\ln y} = e^{\ln u^v} = e^{v\ln u}$, áp dụng cách tính đạo hàm của hàm số hợp ta có:

$$y' = (e^{v\ln u})' = (v\ln u)' e^{v\ln u} = u^v (v'\ln u + \frac{v.u'}{u})$$

Phương pháp 2.

Lấy logarit cơ số e của $y = u^v$ ta được:

$$\ln y = v\ln u \tag{2.1.2}$$

Đạo hàm hai vế của (2.1.2) theo biến x ta có:

$$\frac{y'}{y} = v'\ln u + v\frac{u'}{u}$$

Từ đây suy ra $y' = y(v'\ln u + v\frac{u'}{u}) = u^v (v'\ln u + v\frac{u'}{u})$.

Ví dụ 1. Tính đạo hàm của hàm số $y = x^x$, $x > 0$.

Ta có $y = x^x = e^{x\ln x}$, suy ra

$y' = (e^{x\ln x})' = (x\ln x)' e^{x\ln x} = x^x (\ln x + 1)$.

Ví dụ 2. Tính đạo hàm của hàm số $y = (1+x^2)^{\sin x}$

Ta có $\ln y = \sin x.\ln(1+x^2)$

$$\Rightarrow \qquad (\ln y)' = [\sin x.\ln(1+x^2)]'$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{y'}{y} = \cos x.\ln(1+x^2) + \frac{2x\sin x}{1+x^2}$$

$\Rightarrow$

$$y' = y\left(\cos x.\ln(1+x^2) + \frac{2x\sin x}{1+x^2}\right) = (1+x^2)^{\sin x}\left(\cos x.\ln(1+x^2) + \frac{2x\sin x}{1+x^2}\right)$$

§2. Vi phân của hàm số một biến

1. Khái niệm vi phân và liên hệ với đạo hàm

1.1. Khái niệm khả vi và vi phân

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trong khoảng $X \subset R$. Như ta đã biết, nếu $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 \in X$ thì số gia $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ là một vô cùng bé khi $\Delta x \to 0$.

Định nghĩa. Hàm số $f(x)$ được gọi là khả vi tại điểm x_0 nếu tồn tại số thực k sao cho $\Delta f(x_0)$ là một VCB tương đương với $k.\Delta x$ khi $\Delta x \to 0$, tức là :

$$\Delta f(x_0) = k.\Delta x + 0(\Delta x) \qquad (2.2.1)$$

Tích số $k.\Delta x$ trong biểu thức trên được gọi là vi phân của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0 và được kí hiệu là dy hoặc $df(x_0)$.

Vậy, ta có $df(x_0) = k.\Delta x$

Ví dụ. Xét hàm số $f(x) = x^3$, tại điểm x_0 bất kỳ ta có:

$$\Delta f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 = 3x_0^2\Delta x + 0(\Delta x)$$

Theo định nghĩa $f(x)$ khả vi tại x_0 và $df(x_0) = 3x_0^2\Delta x$.

1.2. Liên hệ với đạo hàm

Định lí. Hàm số f(x) có vi phân tại điểm x_0 khi và chỉ khi nó có đạo hàm tại điểm đó. Khi đó hằng số k trong biểu thức (2.2.1) chính là đạo hàm của hàm số f(x) tại điểm đó, tức là:

$$df(x_0) = f'(x_0).\Delta x \qquad (2.2.2)$$

Chứng minh.

Giả sử hàm số f(x) khả vi tại điểm x_0, tức là tồn tại hằng số k sao cho biểu thức (2.2.1) thoả mãn. Chia hai vế của (2.2.1) cho Δx ta được:

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = k + \frac{0(\Delta x)}{\Delta x}$$

Từ đây suy ra $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = k + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{0(\Delta x)}{\Delta x} = k + 0 = k$. Điều này chứng tỏ f(x) có đạo hàm tại điểm x_0 và $f'(x_0) = k$.

Ngược lại, giả sử f(x) có đạo hàm tại điểm x_0, tức là tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Khi đó ta có $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$, trong đó $\alpha(\Delta x)$ là một VCB khi $\Delta x \to 0$.

Suy ra $z\Delta f(x_0) = f'(x_0).\Delta x + \Delta x.\alpha(\Delta x)$. Do $\alpha(\Delta x) \to 0$ khi $\Delta x \to 0$ nên $\Delta x.\alpha(\Delta x)$ cũng là một VCB khi $\Delta x \to 0$. Vậy theo định nghĩa, hàm số f(x) khả vi tại điểm x_0 và $df(x_0) = f'(x_0).\Delta x$.

Chú ý. Xét hàm số f(x) = x, khi đó ta có $df(x) = dx = (x)'.\Delta x = \Delta x$. Suy ra $dx = \Delta x$, thay vào biểu thức (2.2.2) ta được:

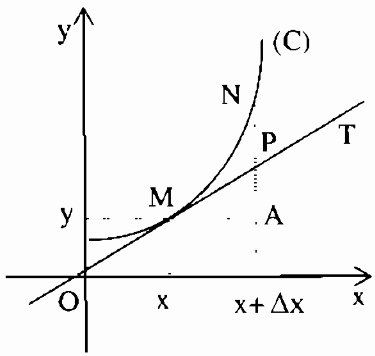
$$df(x_0) = f'(x_0).dx \tag{2.2.3}$$

Ví dụ 1. Cho f(x) = sinx + 2x thì df(x) = (2 + cosx)dx

Ví dụ 1. Cho $f(x) = xe^x$ thì $df(x) = (x + 1)e^x dx$.

1.3. Ý nghĩa hình học của vi phân

Cho đường cong (C) có phương trình y = f(x). Trên (C) lấy điểm M(x; y), kẻ tiếp tuyến với đường cong (C) tại điểm ấy. Cho x biến đổi một lượng Δx , khi đó tung độ y trên đường cong có số gia tương ứng là $\Delta y = AN$ và tung độ y trên tiếp tuyến có số gia tương ứng là AP. Gọi α là góc giữa $\overline{MT}$ và $\overline{MA}$, xét tam giác vuông AMP ta có



$$AP = AM.\,tg\alpha = f'(x_0).\,\Delta x = df(x).$$

Vậy, vi phân của hàm số f(x) tại điểm x_0 đúng bằng số gia của tung độ y trên tiếp tuyến với đường cong y = f(x) tại điểm có hoành độ x_0.

2. Ứng dụng của vi phân vào phép tính gần đúng

Từ ý nghĩa hình học của vi phân ta nhận thấy tại điểm x_0 nào đó có số gia đối số Δx, số gia tương ứng của hàm số là $\Delta f(x_0)$, vi phân của hàm số tại điểm đó là df(x) thì khi Δx có giá trị tuyệt đối nhỏ thì sự sai khác giữa $df(x_0)$ và $\Delta f(x_0)$ là không đáng kể, tức là:

$$\Delta f(x_0) \approx df(x_0). \qquad (2.2.4)$$

do $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$ nên thay vào biểu thức (2.2.4) ta có:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

$$\Leftrightarrow \; f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \qquad (2.2.5)$$

Ví dụ 1. Tính gần đúng $2^{2.98}$

Đặt $f(x) = 2^x$ thì $f'(x) = 2^x\ln 2$, chọn $x_0 = 3$, $\Delta x = -0,02$ thì áp dụng công thức (2.2.5) ta có:

$$2^{2.98} \approx 2^3 - 2^3 \times 0,02 \times \ln 2 = 8 - 0,02 \times 8 \times 0,6831 = 7,889$$

Ví dụ 2. Tính gần đúng $\sin 31^0$

Đặt $f(x) = \sin x$ thì $f'(x) = \cos x$

Chọn $x_0 = 30^0 = \dfrac{\pi}{6}$, $\Delta x = 1^0 = \dfrac{\pi}{180}$ thì áp dụng công thức (2.2.5) ta có:

$$\sin 31^0 = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right) \approx \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}.\frac{\pi}{180} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\pi}{180} = 0{,}514834$$

3. Các phép tính vi phân

Định lí. Nếu các hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ khả vi tại điểm x thì tại điểm đó ta có:

i. $d(u \pm v) = du \pm dv$;

ii. $d(ku) = kdu$ (k là hằng số bất kì);

iii. $d(uv) = udv + vdu$;

iv. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$, $(v \neq 0)$.

Chứng minh

Ta chứng minh công thức iii) các trường hợp còn lại chứng minh tương tự.

Ta có $d(uv) = (uv)'dx = (u'v + uv')dx = v(u'dx) + u(v'dx) = udv + vdu$.

§3. Đạo hàm và vi phân cấp cao - Công thức Taylor

1. Đạo hàm cấp cao

Định nghĩa. Như ta đã biết, nếu hàm số y = f(x) có đạo hàm là $f'(x)$ thì nói chung $f'(x)$ cũng là hàm số của biến số x và ta gọi nó là đạo hàm cấp một. Đạo hàm của hàm số này (nghĩa là đạo hàm của đạo hàm cấp 1) được gọi là đạo hàm cấp hai của hàm số f(x), kí hiệu là $f''(x)$. Theo định nghĩa ta có $f''(x)= \left(f'(x)\right)'$

Tương tự, đạo hàm của đạo hàm cấp hai được gọi là đạo hàm cấp 3, kí hiệu $f'''(x)$.

Đạo hàm của dạo hàm cấp 3 được gọi là đạo hàm cấp 4, kí hiệu là $f^{(4)}(x)$.

Tổng quát, đạo hàm của đạo hàm cấp (n -1) được gọi là đạo hàm cấp n của hàm số f(x). Kí hiệu là $f^{(n)}(x)$ và $f^{(n)}(x)= \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$.

Ví dụ.

- $f(x) = e^x$ thì $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x, \ldots, f^{(n)}(x) = e^x$.

- $f(x) = x^{\alpha}$ thì $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, $f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}, \ldots, f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$

Đặc biệt $\alpha = -1$ thì $\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n.n!}{x^{n-1}}$

2. Vi phân cấp cao

Định nghĩa. Vi phân của hàm số $y = f(x)$ là $df(x)$ nói chung là hàm số của biến số x và được gọi là vi phân cấp 1 của hàm số f(x). Vi phân của hàm số này (tức là vi phân của vi phân cấp 1) được gọi là vi phân cấp 2, kí hiệu là $d^2f(x)$.

Theo định nghĩa ta có:

$$d^2f(x) = d(df(x)) = (f'(x)dx)'dx = f''(x)(dx)^2 = f''(x)dx^2$$

Tương tự, vi phân của vi phân cấp 2 được gọi là vi phân cấp 3, kí hiệu là $d^3f(x)$.

Tổng quát, vi phân của vi phân cấp (n -1) được gọi là vi phân cấp n của hàm số f(x), kí hiệu là $d^nf(x)$ và $d^nf(x) = d(d^{n-1}f(x)) = f^{(n)}(x)dx^n$.

Ví dụ. $f(x) = x^3 + 1$ thì $d^3f(x) = f'''(x)dx^3 = 6dx^3$

3. Công thức Taylor

3.1. Định lí. Giả sử hàm số f(x) có đạo hàm tới cấp (n + 1) trong một lân cận V của điểm x_0, khi đó với mọi $x \in V$ ta có:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

(2.3.1)

trong đó $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ với c nằm giữa x_0 và x.

Ta công nhận định lí và không chứng minh.

Công thức (2.3.1) được gọi là công thức khai triển Tarlor cấp n của hàm số f(x) ở lân cận của điểm x_0. $R_n(x)$ được gọi là phần dư của công thức khai triển (2.3.1).

Trong trường hợp $x_0 = 0$ thì công thức (2.3.1) có dạng:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

(2.3.2)

trong đó $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$ với c nằm giữa 0 và x.

Công thức (2.3.2) được gọi là công thức Maclaurin

Ví dụ 1. Viết công thức Tarlor cấp 3 của hàm số $f(x) = e^x$ ở lân cận điểm $x_0 = -1$.

Ta có $f^{(n)}(x) = e^x \ \forall n = 1, 2, 3,..$nên suy ra $f^{(n)}(-1) = \dfrac{1}{e} \ \forall n = 1, 2, 3,..$

Công thức cần tìm là:

$$e^x = \frac{1}{e} + \frac{1}{e}(x+1) + \frac{1}{2!e}(x+1)^2 + \frac{1}{3!e}(x+1)^3 + \frac{e^c}{4!}(x+1)^4,$$ với c nằm giữa -1 và x

Ví dụ 2. Khai triển đa thức $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ theo các luỹ thừa của $(x - 2)$

Ta có:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5 \quad \Rightarrow \quad f(2) = 11$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 3 \quad \Rightarrow \quad f'(2) = 7$$

$$f''(x) = 6x - 4 \quad \Rightarrow \quad f''(2) = 8$$

$$f'''(x) = 6 \quad \Rightarrow \quad f'''(2) = 6$$

$$f^{(4)}(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f^{(4)}(2) = 0$$

Công thức cần tìm có dạng:

$$f(x) = 11 + 7(x-2) + \frac{8}{2!}(x-2)^2 + \frac{6}{3!}(x-2)^3 = 11 + 7(x-2) + 4(x-2)^2 + (x-2)^3$$

3.2. Công thức Maclaurin của một số hàm sơ cấp cơ bản

- $f(x) = e^x$ ta có $f(0) = 1$,

  $f^{(n)}(x) = e^x \ \forall n = 1, 2, 3, .. \Rightarrow f^{(n)}(0) = 1 \ \forall n = 1, 2, 3, ..$

  suy ra: $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}$, với c

nằm giữa 0 và x.

- $f(x) = \ln(1 + x)$ ta có $f(0) = 0$.

  $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \ \forall n = 1, 2, 3, ... \Rightarrow f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}.(n - 1)!, \ \forall n = 1, 2, 3, ..$

  suy ra

  $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n\frac{\ln(1+c).x^{n+1}}{(n+1)},$$

  với c nằm giữa 0 và x

- $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{\sin\left[c + \frac{(2n+3)\pi}{2}\right].x^{2n+3}}{(2n+3)!}$$

  với c nằm giữa 0 và x

- $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \frac{\cos\left[c + \frac{(2n+2)\pi}{2}\right].x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

  với c nằm giữa 0 và x.

3.3. Ứng dụng vào tính gần đúng

Ví dụ 1. Tính gần đúng số e.

Áp dụng công thức Maclaurin của hàm e^x với x = 1 ta có:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}, \text{ với } c \in (0; 1).$$

suy ra $e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}$, với sai số $\delta = \frac{e^c}{(n+1)!} <$

$\frac{e^1}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$.

Lấy n = 8 thì $e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{8!} \approx 2.71828$ với sai số

$\delta < \frac{3}{9!} < 10^{-5}$.

Ví dụ 2. Tính gần đúng $\sin 40^0$ với sai số $\delta < 10^{-4}$.

$$\sin 40^0 = \sin\frac{2\pi}{9} \approx \frac{2\pi}{9} - \frac{\left(\frac{2\pi}{9}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{2\pi}{9}\right)^5}{5!} \approx 0{,}69813 - 0{,}05671 + 0{,}00138 \approx 0{,}6428$$

với sai số $\delta < \frac{\left(\frac{2\pi}{9}\right)^7}{7!} < 10^{-4}$.

§4. Quy tắc Lôpitan

Quy tắc Lôpitan cho phép ta sử dụng đạo hàm để khử các dạng vô định dạng $\frac{0}{0}$ và $\frac{\infty}{\infty}$ khi tính giới hạn của hàm số.

1. Định lí.

Giả sử các hàm số u(x) và v(x) thoả mãn các điều kiện:

i. Giới hạn $\lim\limits_{x \to a} \frac{u(x)}{v(x)}$ có dạng vô định $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$, tức là cả hai hàm số u(x) và v(x) cùng có giới hạn 0 hoặc cùng có giới hạn vô hạn khi $x \to a$.

ii. Tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x \to a} \frac{u'(x)}{v'(x)}$ (hữu hạn hoặc vô hạn).

Khi đó ta có: $$\lim_{x \to a} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \to a} \frac{u'(x)}{v'(x)}$$

Ví dụ 1. Tính giới hạn $A = \lim\limits_{x \to 0} \frac{tgx - x}{x - \sin x}$.

Giới hạn này có dạng $\frac{0}{0}$ nên áp dụng quy tắc Lôpitan ta có:

$$A = \lim_{x\to 0}\frac{tgx - x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{(tgx - x)'}{(x - \sin x)'}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos^2 x}{(1 - \cos x)\cos^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{1 + \cos x}{\cos^2 x} = 2$$

Ví dụ 2. Tính giới hạn $B = \lim_{x\to 0}\frac{2^x - 1}{\sin 3x}$.

Ta có $B = \lim_{x\to 0}\frac{2^x - 1}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{(2^x - 1)'}{(\sin 3x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{2^x \ln 2}{3\cos 3x} = \frac{\ln 2}{3}$

Ví dụ 3. Tính giới hạn $C = \lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x}$.

Giới hạn có dạng $\frac{\infty}{\infty}$ nên áp dụng quy tắc Lôpitan ta có:

$$C = \lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{(e^x)'}{(x)'} = \lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{1} = +\infty$$

Chú ý. Trường hợp $\lim_{x\to a}\frac{u'(x)}{v'(x)}$ không tồn tại ta không có kết luận gì về giới hạn $\lim_{x\to a}\frac{u(x)}{v(x)}$, trong trường hợp này giới hạn $\lim_{x\to a}\frac{u(x)}{v(x)}$ vẫn có thể tồn tại hoặc không.

Ví dụ. Xét giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x + x}{x}$ có dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Ta thấy $\dfrac{(\sin x + x)'}{(x)'} = 1 + \cos x$ không có giới hạn khi $x \to \infty$.

trong khi đó $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x + x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{x}.\sin x\right) = 1$ (do $\dfrac{1}{x} \to 0$ và sinx là hàm bị chặn).

2. Các dạng vô định khác

2.1. Dạng vô định $0.\infty$

Dạng vô định $0.\infty$ là dạng giới hạn $\lim\limits_{x\to a} u(x).v(x)$, trong đó hàm số u(x) có giới hạn 0, v(x) có giới hạn ∞. Trong trường hợp này ta biến đổi như sau:

$$\lim_{x\to a} u(x).v(x) = \lim_{x\to a}\frac{u(x)}{v^{-1}(x)} \text{ (dạng } \frac{0}{0}\text{) hoặc } \lim_{x\to a} u(x).v(x) = \lim_{x\to a}\frac{v(x)}{u^{-1}(x)}$$

$$\text{(dạng } \frac{\infty}{\infty}\text{).}$$

Ví dụ . Tính giới hạn $D = \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$

$$\text{Ta có } D = \lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = -\lim_{x\to 0^+} x = 0$$

2.2. Dạng vô định $\infty - \infty$

Dạng vô định $\infty - \infty$ là dạng giới hạn $\lim\limits_{x\to a}[u(x) - v(x)]$, trong đó $u(x)$ và $v(x)$ là hai hàm số cùng dấu và cùng có giới hạn ∞. Trong trường hợp này ta biến đổi như sau:

$$\lim_{x\to a}[u(x) - v(x)] = \lim_{x\to a}\left[\frac{1}{u^{-1}(x)} - \frac{1}{v^{-1}(x)}\right] = \lim_{x\to a}\frac{\dfrac{1}{v(x)} - \dfrac{1}{u(x)}}{\dfrac{1}{u(x).v(x)}} \ \ (\text{dạng } \frac{0}{0})$$

Chú ý. Trong trường hợp $u(x)$ và $v(x)$ là các phân thức với mẫu số có giới hạn 0 khi $x \to a$ thì ta dễ dàng biến đổi giới hạn đã cho về dạng $\frac{0}{0}$ bằng cách quy đồng mẫu số.

Ví dụ. Tính giới hạn $E = \lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$

Ta có

$$E = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{x\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} = \lim_{x\to 1}\frac{(x\ln x - x + 1)'}{[(x-1)\ln x]'} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x + 1 - \dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)'}{\left(\ln x + 1 - \dfrac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

2.3. Các dạng vô định $0^0, 1^\infty, \infty^0$

Các dạng vô định $0^0, 1^\infty, \infty^0$ xuất hiện khi ta tính $\lim\limits_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}$, trong đó u = u(x) > 0, và v(x):

- Nếu $u \to 1$, $v \to \infty$ khi $x \to a$ thì có dạng 1^∞
- Nếu $u \to 0$, $v \to 0$ khi $x \to a$ thì $\lim\limits_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}$ có dạng 0^0
- Nếu $u \to \infty$, $v \to 0$ khi $x \to a$ thì $\lim\limits_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}$ có dạng ∞^0

Khi gặp giới hạn có các dạng trên ta làm như sau:

Đặt $y = u^v$, sau đó logarit cơ số e hàm $y = u^v$ ta được:

$$\ln y = v.\ln u \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x\to a}(\ln y) = \lim_{x\to a}(v.\ln u)$$

$$\Leftrightarrow \qquad \ln\left(\lim_{x\to a} y\right) = \lim_{x\to a}(v.\ln u)$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{x\to a} y = \lim_{x\to a} u^v = e^{\lim\limits_{x\to a}(v.\ln u)} = \exp(\lim_{x\to a}(v.\ln u)$$

Vậy ta có:

$$\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}[v(x).\ln u(x)]}$$

Ví dụ 1. Tính giới hạn $G = \lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\cot g^2 x}$, (Giới hạn có dạng 1^∞).

Áp dụng công thức $\lim\limits_{x\to a}[u(x)]^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}[v(x).\ln u(x)]}$ ta có

$G = \lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\cot g^2 x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\cot g^2 x.\ln(\cos x)} = e^J$, với

$$J = \lim_{x\to 0}\operatorname{cotg}^2 x.\ln(\cos x) = \lim_{x\to 0}\operatorname{cotg}^2 x.\ln(\cos x)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{\operatorname{tg}^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{tg}x}{2\operatorname{tg}x.\frac{1}{\cos^2 x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\cos^2 x}{2} = -\frac{1}{2}\text{. Vậy } G = \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{cotg}^2 x} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

Ví dụ 2. Tính giới hạn $H = \lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$. (Giới hạn có dạng ∞^0).

Áp dụng công thức $\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)} = e^{\lim_{x\to a}[v(x).\ln u(x)]}$ ta có

$$H = \lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}} = e^J,$$

với $J = \lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x} = 0$. Vậy $H = \lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$.

Ví dụ 3. Tính giới hạn $I = \lim_{x\to 0^+} x^{x^2}$, (Giới hạn có dạng 0^0).

Ta có $I = \lim_{x\to 0^+} x^{x^2} = e^{\lim_{x\to 0^+} x^2\ln x} = e^J$,

với $J = \lim_{x\to 0^+} x^2\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{-2}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^{-1}}{-2x^{-3}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-x^2}{2} = 0$.

Vậy $I = \lim_{x\to 0^+} x^{x^2} = e^0 = 1$.

§5. Sử dụng đạo hàm trong phân tích kinh tế

1. Ý nghĩa của đạo hàm trong kinh tế

1.1. Đạo hàm và giá trị cận biên trong kinh tế

Xét mô hình hàm số y = f(x), trong đó x, y là các biến số kinh tế (ta coi biến độc lập x là biến số đầu vào và biến phụ thuộc y là biến số đầu ra).Trong kinh tế học người ta quan tâm đến xu hướng biến thiên của biến phụ thuộc y tại một điểm x_0 khi biến độc lập x thay đổi một lượng nhỏ. Chẳng hạn, khi xét mô hình hàm sản xuất Q = f(L) người ta thường quan tâm đến số lượng sản phẩm tăng thêm khi sử dụng thêm một đơn vị lao động.

Theo định nghĩa đạo hàm:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

nên khi Δx có giá trị tuyệt đối nhỏ thì ta có:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \approx f'(x_0)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0).\Delta x$$

Khi $\Delta x = 1$ ta có $\Delta y \approx f'(x_0)$. Như vậy, đạo hàm $f'(x_0)$ của hàm số y = f(x) biểu diễn xấp xỉ lượng thay đổi giá trị của biến phụ thuộc y khi biến số x tăng thêm một đơn vị.

Khi xét mô hình hàm y = f(x) biểu diễn ảnh hưởng của biến số kinh tế x đối với biến số kinh tế y, các nhà kinh tế gọi $f'(x_0)$ là giá trị y cận biên của x tại điểm x_0.

Đối với mỗi hàm kinh tế, giá trị cận biên có tên gọi cụ thể như sau:

- Hàm sản xuất Q = f(L) thì $f'(L_0)$ được gọi là sản phẩm hiện vật cận biên của lao động

tại điểm L_0 và được kí hiệu là MPP_L.

$$MPP_L = f'(L_0)$$

Ý nghĩa của MPP_L. Tại mỗi điểm L, MPP_L cho biết xấp xỉ lượng sản phẩm hiện vật gia tăng khi sử dụng thêm một đơn vị lao động.

- Hàm doanh thu TR = TR(Q) thì $TR'(Q_0)$ được gọi là doanh thu cận biên tại điểm Q_0 và được kí hiệu là MR.

$$MR = TR'(Q_0)$$

Ý nghĩa của MR. Tại mỗi mức sản lượng Q, MR cho biết xấp xỉ lượng doanh thu tăng thêm khi sản xuất thêm một đơn vị sản phẩm.

Dối với doanh nghiệp cạnh tranh ta có TR = pQ nên MR = p (p là giá sản phẩm trên thị trường).

- Hàm chi phí TC = TC(Q) thì $TC'(Q_0)$ được gọi là chi phí cận biên tại điểm Q_0 và được kí hiệu là MC.

$$MC = TC'(Q_0)$$

Ý nghĩa của MC. Tại mỗi mức sản lượng Q, MC cho biết xấp xỉ lượng chi phí tăng thêm khi sản xuất thêm một đơn vị sản phẩm.

- Hàm tiêu dùng C = C(Y) thì $C'(Y_0)$ được gọi là xu hướng tiêu dùng cận biên và được kí hiệu là MPC.

$$MPC = C'(Y_0)$$

Ý nghĩa của MPC. Tại mỗi mức thu nhập Y, MPC là số đo xấp xỉ lượng tiêu dùng gia tăng khi người ta có thêm $1 thu nhập.

Ví dụ. Giả sử hàm sản xuất của một doanh nghiệp là $Q = 5\sqrt{L}$. Ở mức sử dụng $L_0 = 100$ đơn vị lao động (chẳng hạn 100 giờ lao động một tuần), mức sản lượng tương ứng là Q = 50 sản phẩm. Khi đó sản phẩm cận biên của lao động tại điểm L_0 = 100 là:

$$MPP_L = Q'(L_0) = \frac{5}{2\sqrt{L_0}} = \frac{5}{2\sqrt{100}} = 0.25$$

Diều này có nghĩa là khi tăng mức sử dụng lao động hàng tuần từ 100 lên 101 thì sản lượng hàng tuần sẽ tăng thêm khoảng 0.25 đơn vị hiện vật.

1.2. Đạo hàm cấp hai và quy luật lợi ích cận biên giảm dần

Xét mô hình hàm y = f(x), trong đó y là biến số biểu diễn lợi ích kinh tế (chẳng hạn như thu nhập, lượng sản phẩm, doanh thu, lợi nhuận,..) và x là biến số mô tả yếu tố đem lại lợi ích y. Quy luật lợi ích cận biên giảm dần nói rằng khi x càng lớn thì giá trị y - cận biên càng nhỏ, tức là hàm My = f'(x) là hàm đơn điệu giảm. Dưới góc độ toán học, điều kiện cần để My giảm dần theo x là:

$$(My)' = f''(x) \leq 0$$

Ví dụ. Hàm sản xuất ngắn hạn được ước lượng dưới dạng Q = AL^α, (A và α là các hằng số dương) thì quy luật lợi ích cận biên giảm dần đòi hỏi:

$$Q'' = \alpha(\alpha - 1)AL^{\alpha-2} \leq 0 \Leftrightarrow \alpha \leq 1.$$

2. Tính hệ số co dãn của cung và cầu theo giá

Một vấn đề được quan tâm trong kinh tế là phản ứng của cung và cầu đối với sự biến động giá cả trên thị trường. Với giả thiết các yếu tố khác không thay đổi, sự phụ thuộc của lượng cầu Q_d vào giá p được biểu diễn bằng hàm cầu $Q_d = D(p)$, trong đó biến số p được đo bằng đơn vị tiền tệ còn biến số Q được đo bằng đơn vị hiện vật.

Nếu gọi ΔQ_d là mức thay đổi lượng cầu khi giá thay đổi một đơn vị thì ý nghĩa của con số đó còn phụ thuộc vào đơn vị đo. Hơn nữa, đối với các hàng hoá khác nhau thì sự thay đổi giá thêm \$1 mang ý nghĩa khác nhau. Chẳng hạn, nếu giá một chiếc ô tô tăng thêm \$1 thì có thể xem như giá ô tô không thay đổi, trong khi đó nếu giá của một kg cà phê tăng thêm \$1 thì chắc hẳn đó sẽ là một biến động lớn trên thị trường cà phê. Để đánh giá độ nhạy cảm của cầu hàng hoá đối với sự biến động giá cả, các nhà kinh tế sử dụng khái niệm hệ số co dãn.

Hệ số co dãn của cầu theo giá (tính ở mỗi mức giá) là số đo mức thay đổi phần trăm của lượng cầu khi giá tăng 1%.

Tại mức giá p, nếu giá thay đổi một lượng Δp thì lượng cầu thay đổi tương ứng một lượng ΔQ_d. Mức phần trăm thay đổi của lượng cầu tính bình quân cho 1% thay đổi giá là:

$$\varepsilon = \frac{\Delta Q_d / Q_d}{\Delta p / p} = \frac{\Delta Q_d}{\Delta p} \frac{p}{Q_d} = \frac{\Delta D(p)}{\Delta p} \frac{p}{D(p)}$$

Chuyển qua giới hạn khi $\Delta p \to 0$ ta được công thức tính hệ số co dãn của cầu theo giá tại điểm p là:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta D(p)}{\Delta p} \frac{p}{D(p)} = D'(p).\frac{p}{D(p)}$$

Tương tự, hệ số co dãn của cung theo giá là số đo mức thay phần trăm của lượng cung khi giá tăng 1%. Nếu biết hàm cung $Q_s = S(p)$ thì hệ số co dãn của cung theo giá được tính theo công thức:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta S(p)}{\Delta p} \frac{p}{S(p)} = S'(p).\frac{p}{S(p)}$$

Ví dụ. Nếu hàm cầu là $Q = 1400 - p^2$ thì hệ số co dãn tại điểm p là:

$$\varepsilon = D'(p).\frac{p}{D(p)} = \frac{\left(1400 - p^2\right)'.p}{1400 - p^2} = \frac{-2p^2}{1400 - p^2}$$

Tại điểm p = 20 ta có $\varepsilon = -0{,}8$, có nghĩa là tại mức giá p = 20, nếu giá tăng 1% thì cầu sẽ giảm khoảng 0,8%.

3. Quan hệ giữa hàm bình quân và hàm cận biên

Trong kinh tế người ta dùng hàm chi phí biểu diễn tổng chi phí TC ở mỗi mức sản lượng Q:

$$TC = TC(Q)$$

Khi phân tích sản xuất, cùng với hàm chi phí, người ta còn sử dụng hàm chi phí bình quân và hàm chi phí cận biên.

Ở mỗi mức sản lượng Q, chi phí bình quân là lượng chi phí tính bình quân trên một đơn vị sản phẩm:

$$AC = \frac{TC(Q)}{Q}$$

Chi phí cận biên tại mỗi mức sản lượng Q là số đo xấp xỉ lượng chi phí gia tăng khi sản xuất thêm một đơn vị sản phẩm. Hàm chi phí cận biên MC là đạo hàm của tổng chi phí:

$$MC = TC'(Q)$$

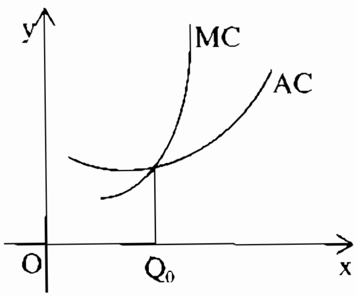
Ta có

$$AC'(Q) = \left(\frac{TC(Q)}{Q}\right)' = \frac{TC'(Q).Q - TC(Q)}{Q^2} = \frac{TC'(Q) - \frac{TC(Q)}{Q}}{Q} = \frac{MC - AC}{Q}$$

Do $Q > 0$ nên dấu của $AC'(Q)$ như dấu của MC – AC, từ đó suy ra:

- Nếu MC > AC thì $AC'(Q) > 0$, tức là khi chi phí cận biên lớn hơn chi phí bình quân thì chi phí bình quân tăng.
- Nếu MC < AC thì $AC'(Q) < 0$, tức là khi chi phí cận biên nhỏ hơn chi phí bình quân thì chi phí bình quân giảm.
- Nếu MC = AC thì $AC'(Q) = 0$, tức là chi phí bình quân chỉ có thể đạt cực tiểu tại điểm mà chi phí bình quân bằng chi phí cận biên

Trên hình vẽ, AC là đường chi phí bình quân, MC là đường chi phí cận biên. Đường MC cắt đường AC tại điểm có hoành độ Q_0. Về phía $Q > Q_0$ ta thấy MC > AC, do đó AC tăng. Về phía $Q < Q_0$ ta thấy MC < AC, do đó AC giảm.



Tương tự, doanh thu bình quân $AR(Q)=\dfrac{TR(Q)}{Q}$ và doanh thu cận biên $MR(Q)=TR'(Q)$ liên hệ với nhau như sau:

- Nếu MR > AR thì $AR'(Q)>0$, tức là khi doanh thu cận biên lớn hơn doanh thu bình quân thì doanh thu bình quân tăng
- Nếu MR < AR thì $AR'(Q)<0$, tức là khi doanh thu cận biên nhỏ hơn doanh thu bình quân thì doanh thu bình quân giảm.
- MR = AR khi và chỉ khi $AR'(Q)=0$, tức là doanh thu bình quân chỉ có thể đạt cực đại tại điểm mà doanh thu cận biên bằng doanh thu bình quân.

4. Sự lựa chọn tối ưu trong kinh tế

Trong lĩnh vực hoạt động kinh tế việc ra quyết định gắn liền với tối ưu hoá một hàm mục tiêu y = f(x), do đó bài toán đặt ra là lựa chọn x để y đạt giá trị cực đại hoặc giá trị cực tiểu. Đối với một doanh nghiệp sản xuất, mục tiêu thường đặt ra là tối ưu hoá lợi nhuận.

4.1. Chọn mức sản lượng tối ưu

Giả sử doanh nghiệp có hàm tổng chi phí TC(Q) và hàm tổng doanh thu TR(Q). Tổng lợi nhuận của doanh nghiệp là hàm số π = TR(Q) - TC(Q).

Bài toán đặt ra là chọn mức sản lượng Q_0 để thu lợi nhuận tối đa. Điều kiện cần để π đạt cực đại tại điểm Q_0 là:

$$\pi' = TR'(Q) - TC'(Q) = 0 \Leftrightarrow TR'(Q) = TC'(Q) \Leftrightarrow MR = MC$$

tức là điều kiện cần để doanh nghiệp đạt lợi nhuận tối đa là doanh thu cận biên bằng chi phí cận biên.

Tại điểm mà MR = MC, điều kiện đủ để π đạt cực đại là:

$$\pi'' = TR''(Q) - TC''(Q) < 0 \Leftrightarrow TR''(Q) < TC''(Q)$$

Ví dụ. Giả sử $TR = 1400Q - 7.5Q^2$ và $TC = Q^3 - 6Q^2 + 140Q + 750$, ta có:

$MR - 1400 - 15Q$, $MC = 3Q^2 - 12Q + 140$.

Điều kiện cần để đạt lợi nhuận tối đa là:

$$MR = MC \Leftrightarrow 1400 - 15Q = 3Q^2 - 12Q + 140 \Leftrightarrow Q^2 + Q - 420 = 0$$

$$\Leftrightarrow Q = 20 \text{ hoặc } Q = -21 (\text{loại do } Q > 0)$$

Tại điểm Q = 20 ta có:

$TR''(Q) = MR' = -15$, $TC''(Q) = MC' = 6Q - 12 = 108$, do đó điều kiện đủ $TR''(Q) < TC''(Q)$ thoả mãn nên mức sản lượng tối ưu là $Q_0 = 20$. Khi đó lợi nhuận tối đa doanh nghiệp đạt được là $\pi = -20^3 - 1{,}5\times20^2 + 1260\times20 - 750 = 15850$.

4.2. Lựa chọn tối ưu mức sử dụng yếu tố đầu vào

Xét trường hợp doanh nghiệp cạnh tranh tiến hành sản xuất với hàm sản xuất ngắn hạn $Q = f(L)$, trong điều kiện giá sản phẩm trên thị trường là p và giá lao động (tiền công) là w. Khi đó tổng lợi nhuận là hàm số của biến số L (lượng lao động được sử dụng):

$$\pi = pf(L) - wL - C_0 \text{ (}C_0\text{ là chi phí cố định)}$$

Bài toán đặt ra là chọn L_0 để π đạt cực đại. Điều kiện cần để thu lợi nhuận tối đa là $\pi' = pf'(L) - w = 0 \Leftrightarrow pf'(L) = w \Leftrightarrow p.MPP_L = w$

Như vậy, điều kiện cần để đạt lợi nhuận tối đa là giá trị bằng tiền của sản phẩm hiện vật cận biên của lao động bằng giá lao động.

Tại điểm L_0 mà điều kiện cần đã được thoả mãn, điều kiện đủ để đạt lợi nhuận tối đa là:

$$\pi'' = pf''(L_0) < 0 \Leftrightarrow f''(L_0) < 0.$$

Theo quy luật lợi ích cận biên giảm dần thì sản phẩm hiện vật cận biên của lao động giảm dần khi L tăng, do đó $Q'' = f''(L) < 0$, tức điều kiện đủ thoả mãn.

Ví dụ. Giả sử doanh nghiệp cạnh tranh có hàm sản xuất ngắn hạn $Q = 50\sqrt{L}$, giá sản phẩm là \$4 và giá lao động \$5. Điều kiện cần để doanh nghiệp đạt lợi nhuận tối đa là:

$$4.MPP_L = 5 \Leftrightarrow 4.\frac{25}{\sqrt{L}} = 5 \Leftrightarrow L = 400$$

Điều kiện đủ thoả mãn vì $Q''(400) < 0$.

Vậy để đạt lợi nhuận tối đa thì doanh nghiệp phải sử dụng 400 đơn vị lao động.

Bài tập chương 2

1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a. $y = \dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ b. $y = \sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$ c. $y = \dfrac{\sin^2 x}{\sin x^2}$

d. $y = tg\dfrac{x}{2} - cotg\dfrac{x}{2}$ e. $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ g. $y = e^x.\ln\sin x$

h. $y = x^{\frac{1}{x}}$ i. $y = e^{x^x}$ k. $y = (\sin x)^x$

2. Tìm vi phân của các hàm số sau:

a. $y = \dfrac{1}{x}$ b. $y = \dfrac{1}{3}arctg\dfrac{x}{3}$ c. $y = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right|$

d. $y = \ln\dfrac{1-x}{1+x}$ e. $y = \arcsin\dfrac{x}{3}$ g. $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

3. Tính gần đúng giá trị của các biểu thức sau:

a. $\sin 29^0$ b. $\sqrt[3]{0.98}$ c. $2^{0.98}$

4. Tính đạo hàm cấp hai của hàm số :

a. $y = x\sqrt{1+x^2}$ b. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x-x^2}}$ c. $y = (1+x^2)arctgx$

5. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số sau:

a. $y = xe^x$ b. $y = \dfrac{1}{x+1}$ c. $y = \ln(ax+b)$

6. Sử dụng quy tắc Lôpitan tính các giới hạn sau

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$ b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg}x}{\ln(1+\frac{1}{x})}$ c. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

d. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{cotg}x-\dfrac{1}{x}\right)$ e. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x\operatorname{tg}x-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$ g. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$

h. $\lim\limits_{x\to 1}\ln x.\ln(1-x)$ i. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}2x.\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$ k. $\lim\limits_{x\to 0}[\ln(e+x)]^{\frac{1}{x}}$

l. $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}$ m. $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$ n. $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$

o. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ p. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)^x$ q. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\operatorname{cotg}x}$

7. Tìm hàm chi phí bình quân và hàm chi phí cận biên, cho biết hàm tổng chi phí là:

a. $C = 3Q^3 + 9Q^2 + 12$

b. $C = 35 + 5Q + 2Q^2 + 2Q^3$

8. Tìm hàm doanh thu bình quân và hàm cận biên, cho biết hàm tổng doanh thu $R = 10Q - Q^2$

9. Tìm hàm lợi nhuận bình quân và hàm lợi nhuận cận biên, cho biết hàm tổng lợi nhuận

$$\pi = Q^2 - 13Q + 78$$

10. Tìm hàm doanh thu cận biên, cho biết hàm cầu có dạng:

a. $Q = 36 - 2P$

b. $Q = 44 - 4P$

11. Tìm hàm chi phí cận biên cho biết hàm chi phí bình quân $AC = 1.5Q + 4 + \frac{46}{Q}$

12. Cho hàm tổng chi phí $TC = Q^3 - 5Q^2 + 600Q$. Hãy xác định mức sản lượng Q để chi phí bình quân nhỏ nhất.

13. Cho biết hàm tổng chi phí TC và hàm tổng doanh thu TR. hãy xác định mức sản lượng cho lợi nhuận tối đa.

a. $TC = Q^3 - 6Q^2 + 140Q + 750$; $TR = 1400Q - 7.5Q^2$

b. $TC = Q^3 - 5.5Q^2 + 150Q + 675$; $TR = 4350Q - 135Q^2$

14. Cho hàm cầu $Q = 20 - 5P$, hãy tìm hệ số co dãn ở các mức giá $p = 2$, $p = 3$.

Chương 3

NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN

§1. Định nghĩa, tính chất và các phương pháp tính nguyên hàm

1. Nguyên hàm của hàm số

1.1. Khái niệm nguyên hàm

Trong chương này ta đề cập đến phép toán ngược của phép lấy đạo hàm và vi phân của hàm số, ta xét bài toán sau:

Tìm tất cả các hàm số có đạo hàm là một hàm số f(x) cho trước.

Định nghĩa. Hàm số F(x) được gọi là nguyên hàm của hàm số f(x) trên (a; b) nếu ta có:

$$F'(x) = f(x), \text{ hay } dF(x) = f(x)dx, \forall x \in (a;b)$$

Ví dụ.

- Hàm số sinx là nguyên hàm của hàm số cosx trên R vì $(\sin x)' = \cos x, \ \forall x \in R$.

- Hàm số x^3 là nguyên hàm của hàm số $3x^2$ trên R vì $(x^3)' = 3x^2, \forall x \in R$

1.2. Dạng tổng quát của nguyên hàm

Định lí. Nếu F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên (a; b) thì:

i) Hàm số F(x) + C, với C là hằng số bất kỳ cũng là nguyên hàm của hàm số f(x).

ii) Ngược lại, mọi nguyên hàm của hàm số f(x) đều biểu diễn được dưới dạng F(x) + C, với C là hằng số bất kỳ.

Chứng minh

i) Với C là hằng số bất kỳ, ta có $[F(x) + C]' = F'(x) + 0 = f(x)$ (vì F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên (a; b)). Theo định nghĩa nguyên hàm ta có F(x) + C, với C là hằng số bất kỳ là nguyên hàm của hàm số f(x) trên (a; b).

ii) Giả sử G(x) cũng là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên (a; b), khi đó ta có:

$$[G(x) - F(x)]' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0, \ \forall x \in (a;b)$$

suy ra G(x) – F(x) nhận giá trị không đổi trên (a; b), tức là $G(x) - F(x) = C, \ \forall x \in (a;b) \Rightarrow G(x) = F(x) + C, \ \forall x \in (a;b)$.

Định nghĩa. Ta gọi F(x) + C là tích phân bất định của hàm số f(x) trên (a; b).

Kí hiệu tích phân bất định của hàm số f(x) là: $\int f(x)dx$, trong đó $\int$ là dấu tích phân, f(x)dx là biểu thức dưới dấu tích phân, f(x) là hàm số dưới dấu tích phân, x là biến số lấy tích phân.

Vậy ta có: $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Ví dụ.

- $\int \cos x dx = \sin x + C$
- $\int 3x^2 dx = x^3 + C$

1.3. Các tính chất cơ bản của tích phân bất định

i) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

ii) $\int F'(x)dx = F(x) + C$

iii) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

iv) $\int k.f(x)dx = k.\int f(x)dx$, k là hằng số.

1.4. Các công thức tích phân cơ bản

1. $\int dx = x + C$

2. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

4. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$

5. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

6. $\int a^x dx = \dfrac{1}{a^x . \ln a} + C$

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

8. $\int \cos x dx = \sin x + C$

9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C$

10. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

11. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C$

12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$

13. $$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

14. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+b}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+b}\right| + C$$

2. Các phương pháp tính tích phân bất định

2.1. Phương pháp phân tích

Để tính $\int f(x)dx$ ta tìm cách phân tích hàm số f(x) dưới dấu tích phân thành tổng đại số các hàm số đơn giản mà tích phân của chúng có sẵn trong bảng các tích phân cơ bản.

Ví dụ.

- $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}=\int(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})dx=\int(x+1)^{1/2}dx-\int x^{1/2}dx=\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}-\frac{2}{3}x^{3/2}+C$

- $\int\frac{dx}{\sin^2x.\cos^2x}=\int\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin^2x.\cos^2x}dx=\int\frac{dx}{\cos^2x}+\int\frac{dx}{\sin^2x}=tgx-cotgx+C$

- $\int tg^2xdx=\int\left(\frac{1}{\cos^2x}-1\right)dx=\int\frac{dx}{\cos^2x}-\int dx=tgx-x+C$

2.2. Phương pháp đổi biến số

Xét tích phân $\int f(x)dx$, trong đó f(x) là hàm số liên tục. Ta có thể tính tích phân này bằng cách chuyển sang tích phân với biến khác bằng cách đặt $x=\varphi(t)$, trong đó $\varphi(t)$ là hàm số có đạo hàm liên tục và có hàm số ngược.

Ta có $dx=\varphi'(t)dt$ nên suy ra $\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=\int g(t)dt$.

Sau khi tính tích phân trên theo biến t xong, từ $x=\varphi(t)$ ta rút t theo x rồi thay trở lại công thức được kết quả cần tìm.

Ví dụ 1. Tính tích phân $\int\sqrt{1-x^2}dx$.

Đặt $x = \sin t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = \cos t dt$ và

$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{\cos^2 x} = \cos x$

Vậy

$$\int\sqrt{1-x^2}dx = \int\cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int(1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)+C$$

$$= \frac{1}{2}(t+\sin t.\cos t)+C =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right)+C.$$

Ví dụ 2. Tính tích phân $\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}$

Đặt $x = tgt$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$ và $1+x^2 = \frac{1}{\cos^2 t}$.

Vậy

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int\cos^2 t.dt = \frac{1}{2}\int(1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)+C$$

$$= \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}x + \frac{x}{1+x^2}\right)+C.$$

Ví dụ 3. Tính tích phân $\int\frac{dx}{1+\sin x}$

Đặt $t = tg\frac{x}{2}$, ta có $x = 2arctgt$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$.

Vậ $\int\frac{dx}{1+\sin x}$

$$= \int\frac{2dt}{(1+t^2)\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)} = \int\frac{2dt}{(1+t)^2} = -\frac{2}{1+t} + C = -\frac{2}{1+tg\frac{x}{2}} + C.$$

Chú ý. Nếu biểu thức dưới dấu tích phân f(x)dx có thể biểu diễn dưới dạng $f(x)dx = g[\varphi(x)]d\varphi(x)$ thì ta có thể đặt $t = \varphi(x)$ để chuyển sang tính tích phân của biểu thức g(t)dt.

Ví dụ. Tính tích phân $\int\frac{e^{2x}dx}{1+e^x}$

Ta có $\int\frac{e^{2x}dx}{1+e^x} = \int\frac{e^x.e^x dx}{1+e^x} = \int\frac{e^x d(e^x)}{1+e^x}$, nên đặt $t = e^x$

ta được:

$$\int\frac{e^{2x}dx}{1+e^x}$$

$$= \int\frac{tdt}{1+t} = \int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt = t - \ln|t+1| + C = e^x - \ln(e^x+1) + C$$

2.3. Phương pháp tích phân từng phần

2.3.1. Công thức tích phân từng phần

Giả sử u = u(x) và v = v(x) là các hàm số có có đạo hàm liên tục, khi đó ta có:

$$d(uv) = vdu + udv$$

$$\Rightarrow \qquad udv = d(uv) - vdu$$

$$\Rightarrow \qquad \int udv = \int d(uv) - \int vdu$$

$$\Rightarrow \qquad \int udv = uv - \int vdu \qquad (3.1.1)$$

Công thức (3.1.1) được gọi là công thức tích phân từng phần.

2.3.2. Áp dụng

Để tính tích phân $\int f(x)dx$ bằng phương pháp tích phân từng phần ta cần phải biểu diễn biểu thức f(x)dx dưới dấu tích phân dưới dạng:

$f(x)dx = g(x).[h(x).dx] = udv$, trong đó $u = g(x)$, $dv = h(x).dx$

sau đó áp dụng công thức tích phân từng phần để tính.

Chú ý.

- Đối với tích phân có dạng $\int x^n.e^{kx}dx$, $\int x^n.\sin kxdx$, $\int x^n.\cos kxdx$ (n nguyên dương) ta áp dụng công thức tích phân từng phần với $u = x^n$, dv là phần còn lại của biểu thức dưới dấu tích phân.

- Đối với tích phân $\int x^\alpha.(\ln x)^n dx$ ($\alpha \neq -1$, n nguyên dương) ta áp dụng công thức tích phân từng phần với u $= (\ln x)^n$ và $dv = x^\alpha dx$.

- Đối với tích phân các tích phân có dạng $\int x^n.\arcsin xdx$, $\int x^n.\arccos xdx$, $\int x^n.\mathrm{arctg}xdx$ ta đặt $dv = x^n dx$, u là các biểu thức còn lại.

Ví dụ 1. Tính tích phân $\int x.\sin xdx$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin x.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$, thay vào công thức tích phân từng phần ta có:

$$\int x.\sin xdx = -x\cos x + \int \cos xdx = -x\cos x + \sin x + C$$

Ví dụ 2. Tính tích phân $\int x^2.\ln x dx$

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^2.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$, thay vào công thức tích phân từng phần ta có:

$$\int x^2.\ln x dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C$$

Ví dụ 3. Tính tích phân $\int x.\mathrm{arctg}x dx$

Đặt $\begin{cases} u = \mathrm{arctg}x \\ dv = x.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$. thay vào công thức tích phân từng phần ta có:

$$\int x.\mathrm{arctg}x dx = \frac{x^2.\mathrm{arctg}x}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{x^2 dx}{1+x^2}$$

$$= \frac{x^2.\mathrm{arctg}x}{2} - \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2.\mathrm{arctg}x}{2} - \frac{1}{2}(x - \mathrm{arctg}x) + C.$$

Ví dụ 4. Tính tích phân $\int x.\mathrm{tg}^2 x dx$

Đặt

$$\begin{cases} u = x \\ dv = tg^2x.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \int tg^2xdx = \int\left(\dfrac{1}{\cos^2x} - 1\right)dx = tgx - x \end{cases}$$ thay

vào công thức tích phân từng phần ta có:

$$\int x.tg^2xdx$$

$$= x(tgx - x) - \int(tgx - x)dx = x(tgx - x) + \ln|\cos x| + \frac{x^2}{2} + C =$$

$$= xtgx + \ln|\cos x| - \frac{x^2}{2} + C.$$

Chú ý. Áp dụng công thức tích phân từng phần ta có:

- $\int e^{ax}\cos bx.dx = \dfrac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2 + b^2} + C$

- $\int e^{ax}\sin bx.dx = \dfrac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2 + b^2} + C$

§2. Một số dạng tích phân cơ bản

1. Tích phân của các phân thức hữu tỷ

1.1. Tích phân của phân thức hữu tỷ với mẫu số bậc nhất

Tính tích phân có dạng $\int \frac{P(x)}{ax+b}dx$, trong đó P(x) là một đa thức của x, $a \neq 0$.

Ta biểu diễn hàm số dưới dấu tích phân $\frac{P(x)}{ax+b} = Q(x) + \frac{k}{ax+b}$, trong đó Q(x) là đa thức nhận được qua phép chia đa thức và k là phần dư của phép chia. Khi đó việc tính tích phân $\int \frac{P(x)}{ax+b}dx$ đưa về việc tính tích phân của đa thức Q(x) và tích phân của phân thức $\frac{k}{ax+b}$. Việc tính tích phân của đa thức Q(x) ta có thể dễ dàng thực hiện được, còn tích phân của phân thức $\frac{k}{ax+b}$ được tính như sau:

$$\int \frac{k.dx}{ax+b} = \frac{k}{a}\ln|ax+b| + C$$

Ví dụ.

- $\int \frac{x^3+3x}{2x+1}dx = \int\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{4} + \frac{13}{8} - \frac{13}{8(2x+1)}\right)dx = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{13x}{8} - \frac{13}{16}\ln|2x+1| + C$

- $\int \frac{x^2-2x+3}{x-1}dx = \int \frac{(x-1)^2+2}{x-1}dx = \int\left[(x-1) + \frac{2}{x-1}\right]dx = \frac{x^2}{2} - x + 2\ln|x-1| + C$

1.2. Tích phân của phân thức hữu tỷ với mẫu số bậc hai

Tính tích phân $I = \int \frac{P(x)}{x^2+px+q}dx$, trong đó P(x) là một đa thức của x.

Bằng cách chia đa thức ta đưa tích phân cần tính về dạng:

$$\int \frac{P(x)}{x^2+px+q}dx = \int\left(Q(x) + \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\right)dx = \int Q(x)dx + \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$$

trong đó Q(x) là một đa thức của x, còn Mx + N là phần dư của phép chia.

Để tính tích phân $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$ ta biến đổi hàm số dưới dấu tích phân như sau:

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q}=\frac{\frac{M}{2}(2x+p)+N-\frac{Mp}{2}}{x^2+px+q}=\frac{M.(2x+p)}{2(x^2+px+q)}+\frac{N-\frac{Mp}{2}}{x^2+px+q}$$

Sau khi khai triển ta được

$$I=\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\int\frac{\frac{M}{2}(2x+p)+N-\frac{Mp}{2}}{x^2+px+q}dx=\int\frac{M.(2x+p)}{2(x^2+px+q)}dx+\int\frac{N-\frac{Mp}{2}}{x^2+px+q}dx=$$

$$=\frac{M}{2}\int\frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q}+(N-\frac{Mp}{2}).I_1, \text{ trong đó}$$

$$I_1=\int\frac{dx}{x^2+px+q}.$$

Để tính tích phân $I_1=\int\frac{dx}{x^2+px+q}$ ta xét các trường hợp sau:

- *Tam thức ở mẫu số có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 $(\Delta=p^2-4q>0)$*

$$I_1=\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\int\frac{dx}{(x-x_1)(x-x_2)}=\frac{1}{x_2-x_1}\int\frac{(x-x_1)-(x-x_2)}{(x-x_1)(x-x_2)}dx=\frac{1}{x_2-x_1}\ln\left|\frac{x-x_2}{x-x_1}\right|+C$$

- *Tam thức ở mẫu số có một nghiệm kép x_0*

  $(\Delta = p^2 - 4q = 0)$

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \int \frac{dx}{(x - x_0)^2} = -\frac{1}{x - x_0} + C$$

- *Tam thức ở mẫu số không có nghiệm $(\Delta = p^2 - 4q < 0)$*

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \int \frac{dx}{(x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}} = \int \frac{dx}{t^2 + a^2} + C = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$$

trong đó

$$t = x + \frac{p}{2},\ a = q - \frac{p^2}{4} = \frac{4q - p^2}{4} > 0.$$

Ví dụ 1. Tính tích phân $I = \int \frac{2x^2 - 3x + 2}{x^2 + x + 1} dx$

$$I = \int \frac{2x^2 - 3x + 2}{x^2 + x + 1} dx = \int \left(2 - \frac{5x}{x^2 + x + 1}\right) dx = 2x - 5\int \frac{x dx}{x^2 + x + 1} = 2x - 5\int \frac{\frac{1}{2}(2x+1) - \frac{1}{2}dx}{x^2 + x + 1} =$$

$$= 2x - \frac{5}{2}\int \frac{d(x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1} - \frac{5}{2}\int \frac{dx}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = 2x - \frac{5}{2}\ln(x^2 + x + 1) + \frac{5}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

Ví dụ 2. Tính tích phân $\int \frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 6} dx$

$$\int \frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 6}dx = \int\left(1 + \frac{3}{x^2 - 5x + 6}\right)dx = x + 3\int \frac{dx}{(x-2)(x-3)} =$$

$$= x + 3\int \frac{(x-2)-(x-3)dx}{(x-2)(x-3)} = x + \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C.$$

Ví dụ 3.

$$\int \frac{dx}{4x^2 - 4x + 1} = \int \frac{dx}{(2x-1)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x-1)}{(2x-1)^2} = -\frac{1}{2(2x-1)} + C$$

2. Tích phân của một số biểu thức chứa căn thức

2.1. Trường hợp biểu thức hàm số chứa căn của nhị thức bậc nhất

Trong trường hợp hàm số dưới dấu tích phân có chứa căn thức $\sqrt[n]{kx+b}$ ta đặt $t = \sqrt[n]{kx+b}$, từ đó suy ra phép biến đổi làm mất căn:

$$x = \frac{1}{k}(t^k - b), dx = \frac{n}{k}t^{n-1}dt$$

Ví dụ. Tính tích phân $\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{(x-1)^2}}$

Đặt $t = \sqrt[3]{(x-1)^2}$, ta có $x = t^3 + 1$. $dx = 3t^2dt$. Thay vào tích phân ta có:

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{(x-1)^2}} =$$

$$\int \frac{3t^2dt}{1+t^2} = 3\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt = 3(t-\text{arctg}t)+C = 3(\sqrt[3]{x-1}-\text{arctg}\sqrt[3]{x-1})+C$$

2.2. Trường hợp hàm số dưới dấu tích phân chứa căn bậc hai của tam thức bậc hai

Trong trường hợp hàm số dưới dấu tích phân có chứa căn thức $\sqrt{ax^2+bx+c}$ ta tìm cách biến đổi tam thức $ax^2 + bx + c$ về một trong ba dạng sau:

- $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{(kx+l)^2+m^2}$ và đặt $kx + l = m.\text{tg}t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

- $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{(kx+l)^2-m^2}$ và đặt $kx + l = \frac{m}{\cos t}$, $t \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

- $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{m^2-(kx+l)^2}$ và đặt $kx + l = m.\sin t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Ví dụ 1. Tính tích phân $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$

Ta có $\sqrt{3-2x-x^2} = \sqrt{4-(x+1)^2}$, nên đặt x + 1 = 2sint, t $\in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ ta được:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x+1)^2}} = \int \frac{2\cos t.dt}{2\cos t} = \int dt = t + C = \arcsin\frac{x+1}{2} + C$$

Ví dụ 2. Tính tích phân $\int \frac{dx}{\sqrt{(5+2x+x^2)^3}}$

Ta có $\sqrt{5+2x+x^2} = \sqrt{(x+1)^2+4}$, nên đặt $x+1 = 2tgt$, $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ ta được:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(5+2x+x^2)^3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left[(x+1)^2+4\right]^3}} = \int \frac{\frac{2}{\cos^2 t}}{\left(\frac{2}{\cos^2 t}\right)^3}dt = \frac{1}{4}\int \cos t.dt = \frac{1}{4}\sin t + C =$$

$$= \frac{tgt}{4\sqrt{1+tg^2t}} + C = \frac{\frac{(x+1)}{2}}{4\sqrt{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}} + C = \frac{x+1}{4\sqrt{x^2+2x+5}} + C.$$

3. Tích phân của một số biểu thức lượng giác

Để tính tích phân $\int R(\sin x;\cos x)dx$, trong đó R(sinx; cosx) là một hàm số hữu tỷ đối với sinx và cosx ta làm như sau:

Đặt $t = tg\frac{x}{2}$, khi đó ta có $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, thay vào ta được:

$$\int R(\sin x;\cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2};\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Ví dụ. Tính tích phân $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

Đặt $t = tg\frac{x}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Khi đó ta được:

$$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t| + C = \ln\left|1+\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C$$

Chú ý.

- Nếu tích phân có dạng $\int \sin^m x.\cos^n x dx$ thì ta xét các trường hợp sau:

  - Nếu m là số lẻ thì ta đặt t = cosx;

  - Nếu n là số lẻ thì ta đặt t = sinx;

  - Nếu m và n là các số chẵn thì ta sử dụng công thức hạ bậc đối với sinx và cosx.

Ví dụ 1. Tính tích phân $\int \sin^4 x.\cos^3 x dx$

Đặt t = sinx $\Rightarrow$ dt = cosxdx, thay vào tích phân cần tính ta có:

$$\int \sin^4 x.\cos^3 x dx = \int \sin^4 x.(1-\sin^2 x)\cos x dx = \int (t^4 - t^6)dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + C = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C$$

Ví dụ 2. Tính tích phân $\int \sin^2 x.\cos^4 x dx$

Ta có:

$$\int \sin^2 x.\cos^4 x dx = \frac{1}{2}\int \sin^2 2x.\cos^2 x dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x.(1+\cos 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x.\cos 2x dx = \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x)dx + \frac{1}{16}\int \sin^2 2x.d(\sin 2x) =$$

$$= \frac{1}{16}\left(x - \frac{\sin 4x}{4}\right) + \frac{\sin^3 2x}{48} + C.$$

- Nếu tích phân có dạng $\int \sin ax.\cos bx.dx$, $\int \sin ax.\sin bx.dx$, $\int \cos ax.\cos bx.dx$ ta sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng thu được kết quả như sau:

$$\int \sin ax.\cos bx dx = \frac{1}{2}\int [\sin(a+b)x + \sin(a-b)x]dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(a+b)x}{a+b} + \frac{\cos(a-b)x}{a-b}\right] + C$$

$$\int \cos ax.\cos bx dx = \frac{1}{2}\int [\cos(a+b)x + \cos(a-b)x]dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(a+b)x}{a+b} + \frac{\sin(a-b)x}{a-b}\right] + C$$

$$\int \sin ax.\sin bx dx = \frac{1}{2}\int [\cos(a-b)x - \cos(a+b)x]dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(a-b)x}{a-b} - \frac{\sin(a+b)x}{a+b}\right] + C$$

Ví dụ. $\int \sin 5x \cos x dx = \frac{1}{2}\int (\sin 6x + \sin 4x)dx = -\frac{\cos 6x}{12} - \frac{\cos 4x}{8} + C$

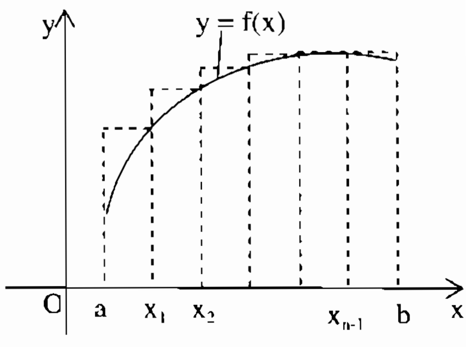
§3. Tích phân xác định

1. Khái niệm tích phân xác định

1.1. Bài toán diện tích hình thang cong

Để minh họa cho khái niệm tích phân xác định, trước hết ta xét bài toán sau: Tính diện tích hình phẳng aABb giới hạn phía trên bởi đường cong liên tục y = f(x), phía dưới là trục Ox và hai bên là hai đường thẳng x = a, x = b (Người ta gọi hình phẳng như vậy là hình thang cong).

Để tính diện tích hình phẳng trên ta làm như sau:



- Chia đoạn [a; b] thành n phần nhỏ không nhất thiết phải bằng nhau bởi các điểm chia:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

- Tại mỗi điểm chia x_i của trục Ox ta kẻ các đường thẳng song song với Oy để chia hình thang cong aABb thành n hình thang cong nhỏ.

Trong mỗi đoạn nhỏ $[x_{i-1}; x_i]$ ta lấy một điểm ξ_i tuỳ ý, khi đó hình thang cong nhỏ thứ i có đáy dưới là đoạn $[x_{i-1}; x_i]$ và có diện tích xấp xỉ bằng diện tích của hình chữ nhật với cùng đáy dưới và chiều cao bằng $f(\xi_i)$. Gọi S_i là diện tích của hình thang cong nhỏ thứ i thì ta có:

$S_i \approx f(\xi_i).\Delta x_i$, trong đó $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ là độ dài đoạn $[x_{i-1}; x_i]$.

Khi đó diện tích S của hình thang cong aABb được tính xấp xỉ theo công thức:

$$S \approx S_n = f(\xi_1).\Delta x_1 + f(\xi_2).\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n).\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).\Delta x_i$$

Trong công thức tính xấp xỉ này, tổng S_n là diện tích của hình phẳng với đáy trên là đường gấp khúc. Khi $n \to +\infty$ sao cho $\max \Delta x_i \to 0$ thì đường gấp khúc càng ngày càng áp sát vào đường cong $y = f(x)$. Như vậy, diện tích S của hình thang cong là giới hạn của tổng S_n khi $\max \Delta x_i \to 0$.

$$S = \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).\Delta x_i. \qquad (3.3.1)$$

Trong toán học, giới hạn (3.3.1) được gọi là tích phân xác định của hàm số f(x) trên đoạn [a; b].

1.2. Định nghĩa tích phân xác định

Cho hàm số f(x) xác định trên đoạn [a; b]. Với mỗi số tự nhiên n > 1, ta chia [a; b] thành n đoạn nhỏ không nhất thiết phải bằng nhau bởi các điểm chia:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

Gọi $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ với $i = 1,2,\ldots,n$ và trên mỗi đoạn chia $[x_{i-1}; x_i]$ lấy một điểm ξ_i tuỳ ý. Lập tổng $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).\Delta x_i$ (I_n gọi là tổng tích phân của hàm số f(x) trên đoạn [a; b]).

Cho số điểm chia tăng lên vô hạn ($n \to +\infty$) sao cho $\max \Delta x_i \to 0$. Nếu trong quá trình đó mà tổng tích phân I_n tiến đến một giới hạn xác định I không phụ thuộc vào cách chia đoạn [a; b] và cách chọn điểm ξ_i tuỳ ý thì I được gọi là tích phân xác định của hàm số f(x) trên đoạn [a; b], kí hiệu là $\int_a^b f(x)dx$.

Theo định nghĩa, ta có:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

trong đó a là cận dưới, b là cận trên, f(x) là hàm số dưới dấu tích phân, x là biến số lấy tích phân.

Chú ý.

i. Nếu a = b thì $\int_a^b f(x)dx = \int_a^a f(x)dx = 0$

ii. Nếu a > b thì $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

iii. Tích phân xác định không phụ thuộc vào biến lấy tích phân, tức là

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

1.3. Ý nghĩa hình học của tích phân xác định

Nếu y = f(x) là hàm số liên tục và f(x) ≥ 0 trên [a; b] thì $\int_a^b f(x)dx$ là số đo diện tích của hình thang cong aABb với cạnh cong phía trên là đồ thị hàm số y = f(x) trên đoạn [a; b]

2. Điều kiện tồn tại tích phân xác định

Định lý. Nếu f(x) liên tục trên doạn [a; b] thì tích phân được trên doạn đó.

3. Các tính chất của tích phân xác định.

Nếu các hàm số f(x), g(x) liên tục trên đoạn [a; b] và $k \in R$ thì ta có:

3.1. $\int_a^b [f(x) \pm f(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

3.2. $\int_a^b k.f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

3.3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, $c \in [a; b]$

3.4. Nếu $f(x) \le g(x)$ trên [a; b] thì $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

3.5. Nếu hàm số f(x) liên tục trên [a; b] thì tồn tại ít nhất một điểm $\xi \in (a; b)$ sao cho:

$$\int_a^b k.f(x)dx = f(\xi).(b - a)$$

Tính chất này được gọi là định lý về giá trị trung bình, số ξ được gọi là giá trị trung bình của hàm số f(x) trên [a; b].

4. Công thức Newton – Leibnitz

Định lí. Nếu F(x) là một nguyên hàm bất kỳ của hàm số f(x) liên tục thì ta có:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b \qquad (3.3.2)$$

Công thức (3.3.2) được gọi là công thức Newton – Leibnitz và nó cho phép ta tính tích phân xác định thông qua nguyên hàm của nó.

Ví dụ.

- $\int_1^2 x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

- $\int_0^2 |1 - x| dx = \int_0^1 (1 - x)dx + \int_1^2 (x - 1)dx = -\frac{(1 - x)^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{(x - 1)^2}{2}\Big|_1^2 = 1$

5. Các phương pháp tính tích phân xác định

5.1. Phương pháp đổi biến số

Giả sử phải tính tích phân $I = \int_a^b f(x)dx$.

Đặt $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)dt$ với giả thiết $\varphi(t)$ là hàm số thoả mãn các điều kiện sau:

- Hàm số $\varphi(t)$ xác định, liên tục và có đạo hàm liên tục trên $[\alpha; \beta]$;
- $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$;
- Khi t biến thiên trên đoạn $[\alpha; \beta]$ hàm số $x = \varphi(t)$ nhận giá trị không vượt ra ngoài đoạn [a; b].

Khi đó:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \int_\alpha^\beta g(t)dt$$

Ví dụ 1. Tính tích phân $A = \int_1^3 \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{(x-2)^2}}$

Đặt $t = \sqrt[3]{x-2} \Rightarrow x = t^3 + 2$ và $dx = 3t^2dt$.

$x = 1$ thì $t = -1$; $x = 3$ thì $t = 1$.

Khi đó ta có:

$$A = \int_1^3 \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{(x-2)^2}} = \int_{-1}^1 \frac{3t^2dt}{1+t^2} = 3\int_{-1}^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = 3(t - \text{arctgt})\Big|_{-1}^1 = 6 - \frac{3\pi}{2}$$

Ví dụ 2. Tính tích phân $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x.\cos^4 x dx$

Ta có $f(x) = \sin^3 x.\cos^4 x dx = \sin^2 x.\cos^4 x.\sin x dx = -(1-\cos^2 x)\cos^4 x.d(\cos x)$ nên ta đặt $t = \cos x$, suy ra:

$$B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x.\cos^4 x dx$$

$$= -\int_1^0 (1-t^2)t^4 dt = \int_0^1 (t^4 - t^6)dt = \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{35}$$

Ví dụ 3. Tính tích phân $C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx$

Đặt $t = \sin x$, ta có $C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$

5.2. Phương pháp tích phân từng phần

Công thức tích phân từng phần mà ta đã sử dụng đối với tích phân bất định được chuyển sang tích phân xác định dưới dạng

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du,$$

trong đó u(x), v(x) là các hàm số liên tục trên đoạn [a; b].

Ví dụ 1. Tính tích phân $A = \int_0^1 xe^x dx$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$

vậy $A = \int_0^1 xe^x dx = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = xe^x\Big|_0^1 - e^x\Big|_0^1 = 1$.

Ví dụ 2. Tính tích phân $B = \int_0^1 x.\text{arctg}x dx$

Đặt $\begin{cases} u = \text{arctg}x \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$, suy ra

$$B = \int_0^1 x.\text{arctg}x dx$$

$$= \frac{x^2 \text{arctg}x}{2}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2 dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left(x - \text{arctg}x\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Ví dụ 3. Tính tích phân $C = \int_0^1 \frac{x.e^x dx}{(x+1)^2}$

Đặt $\begin{cases} u = xe^x \\ dv = \dfrac{dx}{(x+1)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (x+1)e^x \\ v = -\dfrac{1}{x+1} \end{cases}$, suy ra

$$C = \int_0^1 \frac{x.e^x dx}{(x+1)^2}$$

$$-\frac{xe^x}{x+1}\bigg|_0^1 + \int_0^1 e^x dx = -\frac{xe^x}{x+1}\bigg|_0^1 - e^x\Big|_0^1 = -\frac{e}{2} - e + 1 = 1 - \frac{3e}{2}$$

Ví dụ 4. Tính tích phân $D = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x.\sin x.e^{\sin^2 x} dx$

Đặt $t = \sin^2 x \Rightarrow dt = 2\sin x\cos x dx$

$x = 0$ thì $t = 0$; $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = 1$.

Khi đó ta có:

$$D = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x.\sin x.e^{\sin^2 x} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)e^t dt = \frac{e^t}{2}\bigg|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 te^t dt =$$

$$\frac{e}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(te^t - e^t\right)\Big|_0^1 = \frac{e}{2} - 1$$

§4. Tích phân suy rộng

I. Tích phân suy rộng với cận vô cực

Giả sử f(x) là một hàm số liên tục trên khoảng $[a;+\infty)$. Khi đó với mọi $t \in [a;+\infty)$ tồn tại tích phân $F(t) = \int_a^t f(x)dx$.

Ta định nghĩa, giới hạn của tích phân F(t) khi $t \to +\infty$ được gọi là tích phân suy rộng của hàm số f(x) trên khoảng $[a;+\infty)$ và ký hiệu là:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)dx \qquad (3.4.1)$$

Tương tự, tích phân suy rộng của hàm số f(x) trên khoảng $(-\infty;a]$ và trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ được định nghĩa là:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{s \to -\infty} \int_s^b f(x)dx \qquad (3.4.2)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^c f(x)dx + \lim_{s \to +\infty} \int_c^s f(x)dx$$

c là điểm tuỳ chọn. (3.4.3)

Chú ý. Nếu giới hạn ở vế phải của các công thức (3.4.1), (3.4.2), (3.4.3) tồn tại hữu hạn thì tích phân suy rộng được gọi là hội tụ. Ngược lại, nếu giới hạn ở vế phải của công thức trên là vô hạn hoặc không tồn tại thì tích phân suy rộng được gọi là phân kỳ.

Ví dụ 1.

- $$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to+\infty}\operatorname{arctg}x = \frac{\pi}{2}$$

- $$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{s\to-\infty}\int_s^0\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{s\to-\infty}(-\operatorname{arctg}x) = \frac{\pi}{2}$$

- $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi$$

2. Tích phân suy rộng của hàm số gián đoạn

Cho hàm số f(x) liên tục tại mọi $x\in[a;b)$ và f(x) gián đoạn tại x = b. Khi đó với mọi số $\varepsilon>0$ nhỏ tuỳ ý ta có $\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx$ là tích phân xác định thông thường. Ta định nghĩa giới hạn của tích phân $\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx$ khi $\varepsilon\to 0$ được gọi là tích phân suy rộng của hàm số f(x) trên đoạn [a; b] và được ký hiệu như sau:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \qquad (3.4.4)$$

Trường hợp hàm số f(x) liên tục tại mọi $x \in (a;b]$ và f(x) gián đoạn tại x = a thì tích phân suy rộng của hàm số f(x) trên đoạn [a; b] được định nghĩa tương tự và được ký hiệu như sau:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx \qquad (3.4.5)$$

Trường hợp hàm số f(x) liên tục tại mọi $x \in [a;b]$ trừ tại x = c thì tích phân suy rộng của hàm số f(x) trên đoạn [a; b] được định nghĩa và được ký hiệu như sau:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

(3.4.6)

Chú ý. Nếu giới hạn ở vế phải của các công thức (3.4.4), (3.4.5), (3.4.6) tồn tại hữu hạn thì tích phân suy rộng được gọi là hội tụ. Ngược lại, nếu giới hạn ở vế phải của công thức trên là vô hạn hoặc không tồn tại thì tích phân suy rộng được gọi là phân kỳ.

Ví dụ.

- $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin(1-\varepsilon) = \frac{\pi}{2}$$

- $$\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1+\varepsilon}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin(-1+\varepsilon) = \frac{\pi}{2}$$

- $$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

§5. Ứng dụng của tích phân trong kinh tế

1. Ứng dụng của tích phân bất định

1.1. Xác định quỹ vốn dựa theo mức đầu tư

Giả sử việc đầu tư được tiến hành liên tục theo thời gian. Ta xem lượng đầu tư I và quỹ vốn K là các biến số phụ thuộc hàm số vào thời gian t:

$$I = I(t),\ K = K(t)$$

Lượng đầu tư I(t) tại thời điểm t chính là lượng bổ sung quỹ vốn tại thời điểm đó. Nói cách khác, I(t) là tốc độ tăng của K(t), do đó $I(t) = K'(t)$.

Nếu biết hàm đầu tư I(t) thì ta có thể xác định được quỹ vốn K(t) bởi công thức:

$$K(t) = \int I(t)dt$$

hằng số C trong tích phân bất định được xác định nếu ta biết quỹ vốn ban đầu $K_0 = K(0)$.

Ví dụ. Giả sử lượng đầu tư tại thời điểm t được xác định dưới dạng hàm số $I(t) = 140t^{\frac{3}{4}}$ và quỹ vốn tại thời điểm xuất phát là K(0)= 150. Quỹ vốn tại thời điểm t là:

$$K(t) = \int 140t^{\frac{3}{4}}dt = 140.\frac{4}{7}.t^{\frac{7}{4}} + C$$

tại thời điểm xuất phát K(0) = C = 150, do đó

$K(t) = 80t^{\frac{7}{4}} + 150$.

1.2. Xác định hàm tổng khi biết hàm giá trị cận biên

Giả sử biến số kinh tế y mang ý nghĩa tổng giá trị (tổng chi phí, tổng doanh thu, tổng số tiêu dùng,...), được xác định theo giá trị của biến số x là y = f(x).

Mặt khác, như ta đã biết đạo hàm $y' = f'(x)$ là giá trị y cận biên của x. Nếu biết được giá trị cận biên $y' = f'(x) = g(x)$ thì ta có thể xác định được hàm tổng y = f(x) thông qua phép toán tích phân:

$$y = f(x) = \int g(x)dx$$

Ví dụ 1. Giả sử chi phí cận biên ở mỗi sản lượng Q là MC = 25 – 30Q + 9Q^2 và chi phí cố định là FC = 55. Khi đó, hàm tổng chi phí được xác định bởi công thức:

$$C = \int(25 - 30Q + 9Q^2)dQ = 25Q - 15Q^2 + 3Q^3 + C_0$$

Chi phí cố định là phần chi phí không phụ thuộc mức sản lượng Q, dó đó:

$$FC = 55 = C(0) = C_0 \Rightarrow C = 55 + 25Q - 15Q^2 + 3Q^3$$

Chi phí khả biến là phần chi phí phụ thuộc mức sản lượng Q. Đó chính là hiệu số của tổng chi phí và chi phí cố định. Trong trường hợp này $VC = C - FC = 25Q - 15Q^2 + 3Q^3$.

Ví dụ 2. Giả sử doanh thu cận biên ở mỗi mức sản lượng Q được xác định dưới dạng hàm số:

$$MR = 60 - 2Q - 2Q^2$$

Hãy xác định hàm tổng doanh thu và hàm cầu đối với sản phẩm.

Ta có hàm tổng doanh thu R là nguyên hàm của hàm doanh thu cận biên được xác định như sau:

$$R = \int(60 - 2Q - 2Q^2)dQ = 60Q - Q^2 - \frac{2}{3}Q^3 + R_0$$

dễ thấy doanh thu bán hàng khi $Q = 0$ là $R_0 = 0$, do đó

$R = 60Q - Q^2 - \frac{2}{3}Q^3$.

Gọi p = p(Q) là hàm cầu đảo, tức là hàm ngược của hàm cầu Q = D(Q). Ta có R = p(Q).Q $\Rightarrow$

$$p(Q) = \frac{R}{Q} = 60 - Q - \frac{2}{3}Q^2$$

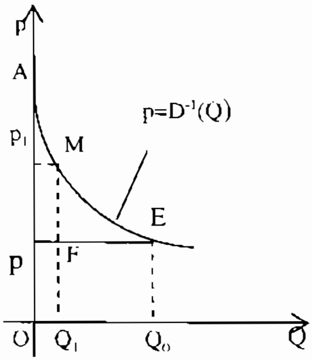
2. Ứng dụng của tích phân xác định

Như ta đã biết, hàm cầu $Q_d = D(p)$ cho biết lượng hàng hoá Q_d mà người mua bằng lòng mua ở mỗi mức giá p. Khi biểu diễn bằng đồ thị mối liên hệ giữa giá và lượng cầu, các nhà kinh tế thường sử dụng trục tung để biểu diễn giá p và trục hoành biểu diễn lượng Q. Với cách biểu diễn như vậy thì đường cầu là đồ thị của hàm cầu đảo $p = D^{-1}(Q_d)$ (hàm ngược của hàm cầu $Q_d = D(p)$).

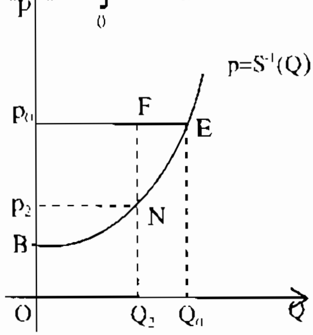
Giả sử điểm cân bằng của thị trường là $(p_0; Q_0)$ và hàng hoá được bán với giá p_0. Khi đó những người mua nếu bằng lòng trả giá $p_1 > p_0$ thì được hưởng một khoản lợi bằng $p_1 - p_0$ (đoạn FM trên hình vẽ). Tổng số hưởng lợi của tất cả những người tiêu dùng bằng diện tích tam giác cong AEp_0. Các nhà kinh tế gọi đó là thặng dư của người tiêu dùng và được tính bằng công thức: $CS = \int_0^{Q_0} D^{-1}(Q)dQ - p_0Q_0$

Hàm cung $Q_s = S(p)$ của thị trường cho biết lượng hàng hoá Q_s mà người bán bằng lòng bán ở mỗi mức giá p. Đường cung là đồ thị của hàm cung đảo $p = S^{-1}(Q_s)$. Nếu hàng hoá được bán ở mức giá cân bằng p_0 thì những nhà sản xuất lẽ ra bằng lòng bán ở mức giá $p_2 < p_0$ được hưởng một khoản lợi bằng $p_0 - p_2$ (đoạn FN trên hình vẽ). Tổng số hưởng lợi của tất cả các nhà sản xuất bằng diện tích của tam giác cong BEp_0. Các nhà kinh tế gọi đó là thặng dư của nhà sản xuất và thặng dư của nhà sản xuất được tính theo công thức:

$$PS = p_0Q_0 - \int_0^{Q_0} S^{-1}(Q)d$$



Thặng dư của người tiêu dùng



Thặng dư của người sản xuất

Bài tập chương 3

1. Tính các tích phân bất định sau:

a. $\int x^2(5-x)^3dx$ b. $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}dx$ c. $\int\frac{x^2+3}{x^2-1}dx$ d. $\int\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx$

e. $\int\frac{\cos 2x}{\sin^2x.\cos^2x}dx$ g. $\int x^2.\sqrt[3]{1+x^3}dx$ h. $\int\frac{xdx}{(1+x^2)^2}$ i. $\int\frac{e^{2x}+1}{e^x+1}dx$

k. $\int\frac{dx}{(\arcsin x)^3\sqrt{1-x^2}}$ l. $\int\frac{dx}{x.\sqrt[3]{1+\ln x}}$ m. $\int e^{x+e^x}dx$ n. $\int e^{2x^2+\ln x}dx$

2. Sử dụng phương pháp đổi biến số tính các tích phân sau:

a. $\int\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$ b. $\int\frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$ c. $\int\sqrt{e^x-1}.dx$ d. $\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$

e. $\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ g. $\int\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}$ h. $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$ i. $\int\frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}dx$

3. Sử dụng phương pháp tích phân từng phần tính các tích phân sau:

a. $\int x\sin 2x dx$ b. $\int x^2e^x dx$ c. $\int \sqrt{x}.\ln x dx$ d. $\int x.\mathrm{arctg}x dx$

e. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$ g. $\int \frac{x.\cos x dx}{\sin^3 x}$ h. $\int \frac{x.\mathrm{arctg}x.dx}{\sqrt{1+x^2}}$ i. $\int \frac{x^2e^x}{(x+2)^2}dx$

k. $\int \frac{\arcsin x.dx}{x^2}$ l. $\int \frac{x.\mathrm{arctg}x dx}{(1+x^2)^2}$ m. $\int \frac{x.e^{\mathrm{arctg}x}.dx}{(1+x^2)^{3/2}}$ n. $\int \cos\sqrt[3]{x}.dx$

4. Tính tích phân các hàm số hữu tỷ:

a. $\int \frac{x^2}{2x+1}dx$ b. $\int \frac{2x^3+x-1}{2x-1}dx$ c. $\int \frac{2x^3+x+1}{x^2-2x+1}dx$ d. $\int \frac{2x^3}{x^4-x^2+1}dx$

e. $\int \frac{dx}{x(x^7+1)}$ g. $\int \frac{dx}{x(x^{10}+1)^2}$ h. $\int \frac{dx}{1+x^3}$ i. $\int \frac{2x^3+3x-2}{(x+1)^2(x^2+x+1)}dx$

5. Tính tích phân các hàm số lượng giác

a. $\int \sin^3.\cos^4 x.dx$ b. $\int \sin 3x.\cos x dx$ c. $\int \sin^2.\cos^4 x.dx$ d. $\int \sin^5 x dx$

e. $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx$ g. $\int \frac{\sin^3 x.dx}{1+\cos x}$ h. $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$ i. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}dx$

6. Tính các tích phân xác định sau:

a. $\int_0^{\pi/4} \cos 2x.dx$ b. $\int_0^1 x^2(2+3x^3)^{10}dx$ c. $\int_0^4 x^3.\sqrt{x^2+9}.dx$ d. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx$

e. $\int_3^9 \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}dx$ g. $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x.\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$ h. $\int_0^{13} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{2x+1}}$ i. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2\cos x+3}$

k. $\int_0^{\pi} x^2.\cos x.dx$ l. $\int_{1/e}^{e} |\ln x|dx$ m. $\int_1^e (x\ln x)^2dx$ n. $\int_0^{\pi/2} \sin 2x\cos^3 x\,dx$

7. Tính các tích phân suy rộng

a. $\int_{-\infty}^{0} xe^x.dx$ b. $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$ c. $\int_0^1 \frac{\ln^2 x.dx}{x}$

Chương 4
HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ

Trong các chương đầu, ta đã nghiên cứu các quan hệ hàm số mà trong đó hàm số chỉ phụ thuộc vào một biến số (hàm số dạng y = f(x)). Nhưng trong thực tế, phần lớn quan hệ hàm số ta gặp phức tạp hơn nhiều. Đó là trường hợp ba, bốn hay nhiều biến số biến thiên đồng thời ảnh hưởng đến nhau. Quan hệ hàm như thế được gọi là quan hệ hàm số nhiều biến số.

Trong việc xây dựng lý thuyết hàm số nhiều biến số, về mặt trình tự nội dung, cách lập luận,... có nhiều điểm giống với phần hàm số một biến số.

§1. Các khái niệm về hàm số nhiều biến số

1. Tích Đề các

1.1. Tích Đề các của hai tập hợp

Định nghĩa. Tích Đề các của hai tập hợp A và B là tập hợp tất cả các cặp (a; b), a trước b sau, được tạo nên do lấy $a \in A$, $b \in B$ một cách bất kỳ.

Kí hiệu tích Đề các của hai tập hợp A và B là: AxB.

Vậy ta có $AxB = \{(a;b) | a \in A, b \in B\}$

Ví dụ .

- Cho A = {1; 2}, B = {x; y} thì ta có AxB = {(1; x), (1; y), (2; x), (2; y)}.
- Cho A = [0; 1], B = [0; 1] thì ta có AxB = {(x; y) $|0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$ }.

1.2. Tích Đề các của n tập hợp

Định nghĩa 2. Tích Đề các của n tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là tập hợp tất cả các bộ n phần tử $(a_1; a_2; \ldots; a_n)$ theo thứ tự $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, ..., $a_n \in A_n$ một cách bất kỳ.

Kí hiệu tích Đề các đó là $A_1 x A_2 x \ldots x A_n$, ta có:

$$A_1 x A_2 x \ldots x A_n = \{(a_1; a_2; \ldots; a_n) \mid a_i \in A_i, i = \overline{1;n}\}$$

Trường hợp $A_1 = A_2 = \ldots = A_n$ thì $A_1 x A_2 x \ldots x A_n = A^n$.

2. Định nghĩa hàm số hai biến số

2.1. Định nghĩa

Xét tích Đề các R^2 và $D \subset R^2$, hàm số hai biến số f xác định trên D là một qui tắc cho tương ứng với mỗi $(x; y) \in D$ với một và chỉ một số thực z.

Ta viết f: (x; y) $\mapsto$ z = f(x; y) hoặc z = f(x; y), trong đó f(x; y) là giá trị của hàm số f tại điểm (x; y).

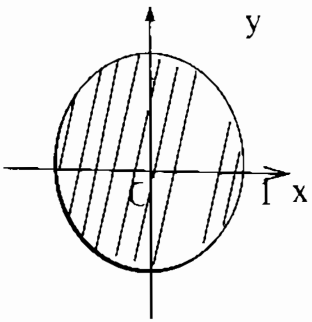
Tập hợp D được gọi là miền xác định của hàm số f.

2.2. Miền xác định của hàm số hai biến số

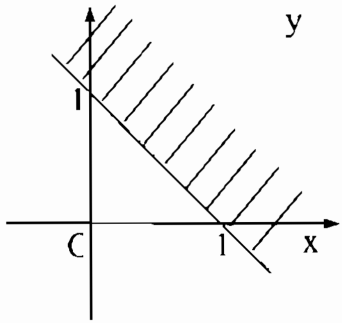
Ta qui ước rằng nếu hàm số z được cho bởi biểu thức z = f(x; y) mà không nói gì thêm về miền xác định của nó thì miền xác định của z = f(x; y) được hiểu là tập hợp tất cả các điểm M(x; y) trên mặt phẳng sao cho biểu thức f(x; y) có nghĩa.

Ví dụ 1. Hàm số $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ được xác định trong miền $x^2 + y^2 \leq 1$, tức là trong hình tròn tâm tại (0; 0) bán kính 1 (hình 4.1.1).

Ví dụ 2. Miền xác định của hàm số z = ln(x + y -1) là miền x + y > 1 (hình 4.1.2)



(hình 4.1.1)



(hình 4.1.2)

2.3. Đồ thị của hàm số hai biến số

Cho hàm số $z = f(x; y)$ xác định trên miền $D \subset R^2$, khi đó với mỗi điểm $M(x;y) \in D$ ta có một điểm $P(x; y; z)$, với $z = f(x; y)$ trong không gian. Khi $M(x;y)$ biến thiên trong miền D thì $P(x; y; z)$ cũng biến thiên và tập hợp các điểm P được gọi là đồ thị của hàm số $z = f(x; y)$.

Chú ý. Đồ thị của hàm số $z = f(x; y)$ nhiều khi là một mặt cong (S) trong không gian.

Ví dụ. Hàm số $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ có đồ thị là nửa mặt cầu tâm tại gốc tọa độ, bán kính R nằm phía trên mặt phẳng $z = 0$.

2.4. Giới hạn và tính liên tục của hàm số hai biến số

2.4.1. Giới hạn của hàm số hai biến số

Số A được gọi là giới hạn của hàm số $z = f(x;y)$ khi điểm $M(x; y)$ tiến dần đến $M_0(x_0; y_0)$ nếu như $|f(x;y) - A|$ là một vô cùng bé khi $MM_0 \to 0$.

Kí hiệu: $\lim\limits_{M \to M_0} f(x;y) = A$ hay $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x;y) = A$.

2.4.2. Tính liên tục của hàm số hai biến.

Hàm số $z = f(x;y)$ được gọi là liên tục tại điểm $M_0(x_0; y_0)$ nếu:

i) $z = f(x;y)$ xác định tại M_0 và mọi điểm $M(x; y)$ thuộc vào lân cận của điểm M_0;

ii) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x;y) = A$.

Chú ý. Nếu ký hiệu $\Delta z = f(x;y) - f(x_0;y_0)$ và $\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0$ thì định nghĩa trên ta có thể phát biểu như sau:

Hàm số $z = f(x;y)$ được gọi là liên tục tại điểm $M_0(x_0; y_0)$ nếu:

i) $z = f(x;y)$ xác định tại mọi điểm $(x; y)$ thuộc vào lân cận của điểm M_0;

ii) $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$.

3. Định nghĩa hàm số nhiều biến số ($n \geq 3$)

Xét tích Đề các R^n và $G \subset R^n$, hàm số n biến số f xác định trên G là một qui tắc cho tương ứng với mỗi $(x_1; x_2; \quad ; x_n) \in G$ với một và chỉ một số thực u.

Ta viết f: $(x_1; x_2;...;x_n) \mapsto u = f(x_1; x_2;...;x_n)$ hoặc $u = f(x_1; x_2;...; x_n)$, trong đó $f(x_1; x_2;...;x_n)$ là giá trị của hàm số f tại điểm $(x_1; x_2;...;x_n)$.

Tập hợp G được gọi là miền xác định của hàm số f.

Ví dụ. Hàm số $u = x^2 + y^2 + z^2$ là hàm số của ba biến số x, y, z.

Chú ý. Giới hạn và tính liên tục của hàm số nhiều biến số hoàn toàn tương tự như giới hạn và tính liên tục của hàm số hai biến số.

§2. Đạo hàm và vi phân của hàm số nhiều biến

1. Đạo hàm riêng

Cho hàm số $z = f(x;y)$ xác định trong một miền D và điểm $M_0(x_0; y_0) \in D$.

Nếu cho $y = y_0$, hàm số một biến số $z = f(x;y_0)$ có đạo hàm tại $x = x_0$ thì đạo hàm đó được gọi là đạo hàm riêng của $f(x; y)$ đối với x tại M_0 và được ký hiệu là:

$$f'_x(x_0; y_0) \text{ hay } \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0).$$

Nếu cho $x = x_0$, hàm số một biến số $z = f(x_0;y)$ có đạo hàm tại $y = y_0$ thì đạo hàm đó được gọi là đạo hàm riêng của $f(x; y)$ đối với y tại M_0 và được ký hiệu là:

$$f'_y(x_0; y_0) \text{ hay } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0).$$

Đặt $\Delta_x f = f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0)$ và ta gọi nó là số gia riêng của của $f(x;y)$ theo x tại $M_0(x_0; y_0)$, khi đó theo định nghĩa đạo hàm của hàm số một biến tại một điểm ta có:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x}.$$

Tương tự, đặt $\Delta_y f = f(x_0; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)$ và gọi nó là số gia riêng của của f(x;y) theo y tại $M_0(x_0; y_0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y}.$$

Chú ý.

i. Các đạo hàm riêng của hàm số n biến số $u = f(x_1; x_2; ...; x_n)$, ($n \geq 3$) được định nghĩa hoàn toàn tương tự, tức là ta có:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1; x_2; ...; x_n) = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} u}{\Delta x_i}, \ i = \overline{1; n}.$$

ii. Khi tính đạo hàm riêng của hàm số theo biến số nào, chỉ việc xem như hàm số chỉ phụ thuộc biến số ấy, các biến số khác được coi như hằng số rồi áp dụng các qui tắc tính đạo hàm của hàm số một biến số.

2. Vi phân toàn phần

Cho hàm số z = f(x;y) xác định trên miền D và điểm $M_0(x_0; y_0) \in D$, cho x_0 số gia Δx, y_0 số gia Δy sao cho $M(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) \in D$.

Khi đó hàm số có số gia là $\Delta z = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)$ và được gọi là số gia toàn phần của hàm số z = f(x; y) tại điểm M_0.

2.1. Định nghĩa. Nếu số gia toàn phần Δz của hàm số z = f(x; y) tại điểm $M_0(x_0; y_0)$ biểu diễn được dưới dạng $\Delta z = A.\Delta x + B\Delta y + \alpha.\Delta x + \beta.\Delta y$, trong đó A, B là các đại lượng chỉ phụ thuộc vào x_0, y_0 còn α, β là các đại lượng vô cùng bé khi $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ thì ta nói hàm số f(x; y) khả vi tại M_0 và biểu thức $A.\Delta x + B.\Delta y$ được gọi là vi phân toàn phần của hàm số f(x; y) tại M_0, kí hiệu là dz.

Vậy ta có $dz = A.\Delta x + B.\Delta y$.

Chú ý.

i. Nếu A, B không đồng thời bằng không (tức $A^2 + B^2 \neq 0$) thì dz và Δz là các vô cùng bé tương đương khi $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

ii. Nếu hàm số z = f(x;y) khả vi tại điểm M_0 thì nó liên tục tại điểm ấy.

2.2. Định lí. Nếu hàm số $z = f(x;y)$ khả vi tại điểm $M_0 \in D$ thì tại đó tồn tại các đạo hàm riêng z'_x, z'_y và vi phân toàn phần của hàm số $z = f(x;y)$ được tính theo công thức:

$$dz = z'_x.\Delta x + z'_y.\Delta y$$

Chứng minh.

Vì hàm số $z = f(x;y)$ khả vi tại $M_0(x_0; y_0)$ nên số gia toàn phần của hàm số biểu diễn được dưới dạng $\Delta z = A.\Delta x + B\Delta y + \alpha.\Delta x + \beta.\Delta y$.

Giữ $y = y_0$ thì ta có $\Delta y = 0$, khi đó $\Delta_x z = A.\Delta x + \alpha.\Delta x$

$\Rightarrow \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = A + \alpha$. Do α là một vô cùng bé nên ta có

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = A = \dfrac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x_0;y_0)$. Tương tự ta có

$A = \dfrac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x_0;y_0)$.

Vậy $dz = z'_x.\Delta x + z'_y.\Delta y$.

Chú ý.

i. Do x, y là các biến số độc lập nên ta có $\Delta x = dx, \Delta y = dy$, suy ra $dz = z'_x dx + z'_y.dy$.

ii. Đối với các hàm số n biến số ($n \geq 3$) ta có định nghĩa và công thức tính vi phân hoàn toàn tương tự, tức là nếu cho hàm số $u = f(x_1; x_2; ..., x_n)$ thì:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}.dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}.dx_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}.dx_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}.dx_i \ .$$

Ví dụ 1. Cho hàm số $z = xy$, tính Δz và dz tại điểm (2; 3) biết $\Delta x = 0.1, \Delta y = 0.2$.

Ta có $\Delta z = (2 + 0.1)(3 + 0.2) - 2.3 = 0.72$ và $z'_x(2;3) = 3, z'_y(2;3) = 2$ nên $dz = 3.0{,}1 + 2.0{,}2 = 0.7$

Ví dụ 2. Cho hàm số $z = x^y$ ($x > 0$), ta có $dz = yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy$

2.3. Ứng dụng của vi phân vào phép tính gần đúng

Ta có khi $|\Delta x|, |\Delta y|$ khá nhỏ thì $\Delta z \approx dz$, tức là:

$$f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0) \approx f'_x(x_0; y_0).\Delta x + f'_y(x_0; y_0).\Delta y$$

$$\Leftrightarrow \ f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) \approx f(x_0; y_0) + f'_x(x_0; y_0).\Delta x + f'_y(x_0; y_0).\Delta y \qquad (4.2.1)$$

Ví dụ. Tính gần đúng giá trị $A = 1{,}04^{2{,}02}$

Giải

Xét hàm số $z = x^y$ $(x > 0)$, ta có $z'_x = yx^{y-1}, z'_y = x^y \ln x$.

Đặt $(x_0; y_0) = (1; 2)$ và $(\Delta x; \Delta y) = (0.04; 0.02)$, khi đó ta có:

$$A = 1{,}04^{2{,}02} \approx 1^2 + 2.1^{2-1}.0{,}04 + 1^2 \ln 1.0{,}02 = 1{,}08$$

3. Đạo hàm của hàm số hợp

3.1. Khái niệm hàm số hợp. Cho hàm số $z = f(u; v)$, trong đó u, v là các hàm số của hai biến số độc lập x, y (tức là $u = u(x; y)$, $v = v(x; y)$). Khi đó z là hàm số hợp của hai biến số x và y thông qua hai hàm số trung gian là u và v, kí hiệu là $z = f[u(x;y); v(x;y)]$.

3.2. Định lý. Nếu hàm số $z = f(u; v)$ khả vi và các hàm số hai biến số $u(x; y)$, $v(x; y)$ có các đạo hàm riêng liên tục thì hàm số $z = f(u; v)$ có các đạo hàm riêng theo biến x, biến y được tính theo công thức:

$$z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x$$
$$z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y$$

Ví dụ. Cho hàm số $z = e^u \sin v$, trong đó $u = xy$, $v = x + y$, khiđó ta có:

$$z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = e^{xy}[y.\sin(x+y) + \cos(x+y)]$$

$$z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = e^{xy}[x.\sin(x+y) + \cos(x+y)]$$

4. Đạo hàm của hàm số ẩn

4.1. Hàm số ẩn một biến số

4.1.1. Khái niệm hàm số ẩn một biến số

Giả sử các giá trị của hai biến số x và y liên hệ với nhau bởi một phương trình có dạng

$$F(x; y) = 0 \tag{4.2.2}$$

Nếu với mỗi x thuộc một khoảng $X \subset R$ nào đó tồn tại một và chỉ một số thực y thoả mãn phương trình (4.2.2) thì phương trình (4.2.2) xác định một hàm số $y = y(x)$, $x \in X$. Khi đó ta nói y là hàm số ẩn của x xác định bởi phương trình (4.2.2).

Ví dụ. Phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (-a \le x \le a, 0 \le y \le b) \tag{4.2.3}$$

xác định y là hàm số của x

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \qquad (4.2.4)$$

Hàm số cho dưới dạng (4.2.3) là hàm số ẩn và trong trường hợp này (4.2.3) đưa được về hàm số tường minh (4.2.4).

Tuy nhiên, trong nhiều trường hợp không phải lúc nào cũng đưa hàm số ẩn y của x xác định bởi (4.2.2) về dạng tường minh.

Ví dụ. Từ hệ thức $x^y = y^x$ $(x > 0, y > 0)$ không thể biểu diễn y theo x.

4.1.2. Cách tính đạo hàm

Đạo hàm theo biến x hai vế của (4.2.2) ta có

$$F'_x + F'_y . y'_x = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}. \quad (F'_y \neq 0) \quad (4.2.5)$$

Ví dụ. Tính đạo hàm của hàm số ẩn xác định bởi phương trình

$$F(x; y) = e^x - e^y + xy = 0$$

Ta có $F'_x = e^x + y$, $F'_y = x - e^y$. Áp dụng công thức (4.2.5) ta có:

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{e^x + y}{x - e^y} = \frac{e^x + y}{e^y - x}$$

4.2. Hàm số ẩn hai biến số

4.2.1. Khái niệm hàm số ẩn hai biến số

Giả sử mối liên hệ giữa biến số z và các biến số x, y liên hệ với nhau bởi một phương trình có dạng

$$F(x; y; z) = 0 \qquad (4.2.6)$$

Nếu với mỗi $(x; y) \in D \subset R^2$ nào đó tồn tại một và chỉ một số thực z thoả mãn phương trình (4.2.6) thì phương trình (4.2.6) xác định một hàm số hai biến $z = f(x; y)$, $(x; y) \in D \subset R^2$. Khi đó ta nói z là hàm số ẩn của hai biến số x, y xác định bởi phương trình (4.2.6).

4.2.2. Cách tính đạo hàm

Việc tính đạo hàm riêng của hàm số ẩn hai biến số được thực hiện tương tự như việc tính đạo hàm của hàm số ẩn một biến số, tức là ta có:

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z},\ z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} \qquad (F'_z \neq 0) \qquad (4.2.7)$$

Ví dụ. Xét hàm ẩn $z = f(x; y)$ xác định bởi phương trình

$$F(x; y; z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

Dễ thấy $F'_x = \frac{2x}{a^2}, F'_y = \frac{2y}{b^2}, F'_z = \frac{2z}{c^2}$, áp dụng công thức (4.2.7) ta có:

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{c^2x}{a^2z},\ z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{c^2y}{b^2z} \quad (z \neq 0)$$

5. Đạo hàm riêng và vi phân cấp cao

5.1. Đạo hàm riêng cấp cao

Cho hàm số hai biến số z = f(x; y), ta gọi các đạo hàm riêng f'_x, f'_y là các đạo hàm riêng cấp một. Các đạo hàm riêng của các đạo hàm riêng cấp một được gọi là đạo hàm riêng cấp 2. Ta có bốn đạo hàm riêng cấp hai như sau:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{x^2}(x;y);\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy}(x;y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{yx}(x;y);\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{y^2}(x;y)$$

Các đạo hàm riêng của các đạo hàm riêng cấp hai được gọi là đạo hàm riêng cấp 3,

Ví dụ. Cho $f(x; y) = xy^2 + x^4$ thì ta có:

$$f'_x(x;y) = y^2 + 4x^3,\ f'_y(x;y) = 2xy$$

$$f''_{x^2}(x;y) = 12x^2,\ f''_{xy}(x;y) = 2y,\ f''_{yx}(x;y) = 2y,\ f''_{y^2}(x;y) = 2x$$

Định lí (Schwarz). Nếu trong một lân cận U nào đó của điểm $M_0(x_0; y_0)$ hàm số z = f(x; y) có các đạo hàm riêng $f''_{xy}(x;y)$,

$f''_{yx}(x;y)$ và các đạo hàm riêng ấy liên tục tại điểm M_0 thì tai đó ta có:

$$f''_{xy}(x;y) = f''_{yx}(x;y)$$

Trong ví dụ trên ta có $f''_{xy}(x;y) = f''_{yx}(x;y) = 2y$.

5.2. Vi phân cấp cao

Xét hàm số hai biến số z = f(x; y), vi phân toàn phần $dz = f'_x.dx + f'_y.dy$ cũng là một hàm số hai biến số của x, y và được gọi là vi phân toàn phần cấp một. Vi phân của vi phân toàn phần cấp một được gọi là vi phân toàn phần cấp hai và được kí hiệu là d^2z.

Ta có $d^2z = d(dz) = d(f'_x.dx + f'_y.dy) = f''_{x^2}(x;y).dx^2 +$

$2f''_{xy}(x;y).dxdy + f''_{y^2}(x;y).dy^2$

Tương tự, $d^3z = d(d^2z)$, , $d^nz = d(d^{n-1}z)$.

Ví dụ. Cho hàm số $z = e^{xy}$, tính d^2z.

Ta có $z'_x = ye^{xy}, z'_y = xe^{xy}$

suy ra $z''_{x^2} = y^2e^{xy}, z''_{y^2} = x^2e^{xy}, z''_{xy} = e^{xy} + xye^{xy} = e^{xy}(1 + xy)$.

Vậy $d^2z = y^2e^{xy}dx^2 + 2e^{xy}(1 + xy)dxdy + x^2e^{xy}dy^2$

§3. Cực trị của hàm số hai biến số

1. Định nghĩa cực trị hàm hai biến

Cho hàm số $z = f(x; y)$ xác định trên miền D và một điểm $M_0(x_0; y_0) \in D$, ta nói:

Hàm số $z = f(x; y)$ đạt cực đại tại $M_0(x_0; y_0)$ nếu với mọi $M(x; y)$ thuộc vào lân cận của M_0 ta có

$$f(x; y) < f(x_0; y_0), \quad (M \neq M_0)$$

Hàm số $z = f(x; y)$ đạt cực tiểu tại $M_0(x_0; y_0)$ nếu với mọi $M(x;y)$ thuộc vào lân cận của M_0 ta có

$$f(x; y) > f(x_0; y_0), \quad (M \neq M_0)$$

Chú ý.

- Điểm $M_0(x_0; y_0)$ được gọi là điểm cực trị còn $f(x_0; y_0)$ gọi là cực trị của hàm số
- Cực trị định nghĩa như trên còn được gọi là cực trị địa phương.

Ví dụ. Chứng minh hàm số $z = \frac{1}{2} - \sin(x^2 + y^2)$ đạt cực đại tại điểm (0;0).

Với mọi (x;y) thuộc vào lân cận của điểm (0;0) trừ nó ta đều có $\sin(x^2+y^2) > 0$, suy ra:

$$z = \frac{1}{2} - \sin(x^2 + y^2) < \frac{1}{2} = z\,(0;0).$$

Theo định nghĩa cực trị của hàm hai biến số ta có hàm số đạt cực đại tại điểm (0;0).

2. Điều kiện cần của cực trị hàm hai biến

Định lý. Nếu hàm khả vi $z = f(x;y)$ đạt cực trị tại $M_0(x_0;\, y_0)$ thì tại đó các đạo hàm riêng cấp một triệt tiêu.

Chứng minh.

Giả sử hàm số $z = f(x;y)$ đạt cực tiểu tại M_0 suy ra $f(x;\, y) > f(x_0;\, y_0), \forall\, M(x;y)$ thuộc vào lân cận của $M_0\,(M \neq M_0)$.

$$\Rightarrow\ f(x\,;\, y_0) > f(x_0;\, y_0) \text{ và } f(x_0\,;\, y) > f(x_0;\, y_0),$$

$\forall\, M(x;y_0), M(x_0;y)$ thuộc vào lân cận của $M_0\,(M \neq M_0)$.

Các bất đẳng thức trên chứng tỏ hàm số hàm số một biến $f(x;\, y_0)$ và $f(x_0;\, y)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0 và y_0 nên theo điều kiện cần cực trị của hàm số một biến số ta có $f'_x(x_0;\, y_0) = 0$, $f'_y(x_0;\, y_0) = 0$.

Chứng minh tương tự trường hợp hàm số f(x;y) đạt CĐ tại điểm M_0.

Chú ý. Điều kiện cần trên cho ta thu hẹp việc tìm cực trị của hàm số tại những điểm $M_0(x_0;y_0)$ mà ở đó các đạo hàm riêng cấp một triệt tiêu. Điểm $M_0(x_0; y_0)$ được gọi là điểm dừng hay điểm tới hạn của hàm số.

3. Điều kiện đủ của cực trị hàm số hai biến

Giả sử $M_0(x_0; y_0)$ là một điểm dừng của hàm số $z = f(x; y)$ và tại đó các đạo hàm riêng cấp hai của nó đều tồn tại và liên tục.

Đặt $A = z''_{x^2}(x_0;y_0)$; $B = z''_{xy}(x_0;y_0)$; $C = z''_{y^2}(x_0;y_0)$ và $\Delta = B^2 - AC$.

Định lý.

- Nếu $\Delta < 0$ thì điểm dừng $M_0(x_0; y_0)$ là điểm cực trị của hàm số $z = f(x; y)$

  $M_0(x_0; y_0)$ là điểm cực đại nếu $A < 0$

  $M_0(x_0; y_0)$ là điểm cực tiểu nếu $A > 0$

- Nếu $\Delta > 0$ thì điểm dừng $M_0(x_0; y_0)$ không là điểm cực trị của hàm số $z = f(x; y)$.

- Nếu $\Delta = 0$ ta không kết luận gì về cực trị tại điểm dừng $M_0(x_0; y_0)$; hàm số có thể đạt cực trị hay không đạt cực trị tại điểm đó. Muốn kết luận được ta phải sử dụng phương pháp khác như dùng định nghĩa hoặc xét dấu các đạo hàm riêng cấp hai của khai triển Taylor của hàm số hai biến mà trong bài này ta không xét tới.

Chú ý. Cách tìm cực trị của hàm số hai biến z = f(x; y).

Sử dụng điều kiện cần để tìm toạ độ các điểm dừng từ nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} z'_x(x;y) = 0 \\ z'_y(x;y) = 0 \end{cases}.$$

Sử dụng điều kiện đủ để kiểm tra lần lượt từng điểm dừng là nghiệm của hệ trên và kết luận.

Ví dụ. Tìm cực trị của hàm số $z = 8x^3 + 2xy - 3x^2 + y^2$.

Giải.

Ta có $z'_x = 24x^2 + 2y - 6x$; $z'_y = 2x + 2y$, suy ra tọa độ điểm dừng là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} z'_x(x;y) = 0 \\ z'_y(x;y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 24x^2 + 2y - 6x = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

suy ra (x; y) = $\{(0;0),(1/3;-1/3)\}$.

Các đạo hàm riêng cấp hai: $z''_{x^2} = 48x - 6$; $z''_{xy} = 2$; $z''_{y^2} = 2$.

Tại điểm (0;0) ta có A = - 6; B = 2; C = 2 và $\Delta = 16 > 0$ nên theo điều kiện đủ hàm số không đạt cực trị .

Tại điểm (1/3;-1/3) ta có A = 10 > 0; B = C = 2 và $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$ nên theo điều kiện đủ hàm số đạt cực tiểu tại điểm (1/3;-1/3) ; $z_{CT}(1/3;-1/3) = -4/27$.

4. Cực trị có điều kiện

4.1. Định nghĩa. Giả sử phải tìm cực trị của hàm số z = f(x; y) trong đó x, y không độc lập với nhau mà ràng buộc với nhau bởi điều kiện $\varphi(x;y) = 0$. Cực trị phải tìm khi đó được gọi là cực trị có điều kiện.

4.2. Cách tìm. Từ biểu thức $\varphi(x;y) = 0$ ta tìm cách biểu diễn y theo x (hoặc x theo y) rồi thay vào hàm số z = f(x; y). Khi đó hàm số z = f(x; y) là hàm số một biến x hoặc y và bài toán tìm cực trị của hàm số hai biến tương đương với bài toán tìm cực trị của hàm số một biến số.

Ví dụ. Tìm cực trị của hàm số $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ với điều kiện y = a (0 < a < 1).

Giải.

Thay $y = a$ vào hàm số $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ta được $z = \sqrt{1 - a^2 - x^2}$, khi đó bài toán phải tìm tương đương với việc tìm cực trị của hàm số một biến số x với $x \in [-\sqrt{1-a^2}; \sqrt{1-a^2}]$.

Ta có $z'_x = -\dfrac{x}{\sqrt{1-a^2-x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

x	$-\sqrt{1-a^2}$		0		$\sqrt{1-a^2}$
z'_x	$\Vert$	$+$		$-$	$\Vert$
$z(x)$		$\nearrow$	$\sqrt{1-a^2}$	$\searrow$	

Vậy ta có hàm số một biến số x đạt cực đại tại điểm $x = 0$ và $z_{CĐ} = \sqrt{1-a^2}$, suy ra hàm số hai biến số $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ đạt cực tại tại $(0; a)$ và $z_{CĐ} = \sqrt{1-a^2}$.

5. GTLN và GTNN của hàm số hai biến trong một miền xác định kín

Nhận xét. Như ta đã biết cực trị của hàm số $z = f(x; y)$ chỉ có tính chất địa phương chứ chưa hẳn đã là GTLN và GTNN của hàm số trong một miền xác định kín D nào đó. GTLN và GTNN của hàm số có thể đạt tại điểm cực trị hoặc tại các điểm trên biên của miền

D, do vậy để tìm GTLN và GTNN của hàm số trong một miền xác định kín D nào đó ta là theo các bước sau:

- Tính giá trị của hàm số tại các điểm dừng thuộc miền D;
- Tính GTLN, GTNN của hàm số trên biên của miền D;
- So sánh GTLN, GTNN của hàm số trên biên của miền D với giá của hàm số tại các điểm dừng thuộc miền D để tìm GTLN và GTNN của hàm số trên miền D.

Ví dụ. Trong miền tam giác OAB giới hạn bởi các trục tọa độ và đường thẳng $x + y = 1$. Tìm các điểm M sao cho tổng bình phương các khoảng cách từ M tới các đỉnh của tam giác là nhỏ nhất.

Giải.

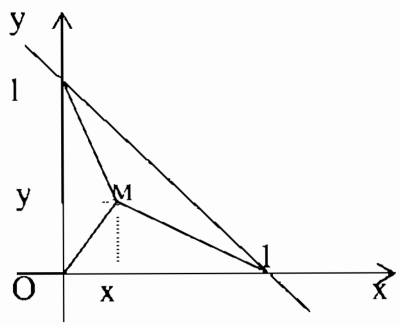
Giả sử $M(x;\ y)$ là điểm nằm trong miền tam giác OAB, khi đó ta có $x, y \in [0; 1]$, $x + y \leq 1$ và:

$OM^2 = x^2 + y^2$

$MA^2 = x^2 + (1-y)^2$

$MB^2 = (1-x)^2 + y^2$

$\Rightarrow S(x;\ y) = OM^2 + MA^2 + MB^2 = 3x^2 + 3y^2 - 2y - 2x + 2$



Bài toán đã cho tương đương với việc tìm các điểm M(x; y) trong miền tam giác OAB sao cho hàm số hai biến S(x; y) đạt GTNN.

Tính giá trị của hàm số tại các điểm dừng:

Ta có điểm dừng là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} S'_x = 6x - 3 = 0 \\ S'_y = 6y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x;y) = \left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right) \Rightarrow S(\frac{1}{3};\frac{1}{3}) = \frac{4}{3} \qquad (4.3.1)$$

Tìm GTNN trên biên:

Trên OA ta có x = 0 và $y \in [0;1]$, khi đó $S(y) = 3y^2 - 2y + 2$

$$\Rightarrow \qquad \min_{[0;1]} S(y) = S(\frac{1}{3}) = \frac{5}{3} \qquad (4.3.2)$$

Trên OB ta có y = 0 và $x \in [0;1]$, khi đó $S(x) = 3x^2 - 2x + 2$

$$\Rightarrow \qquad \min_{[0;1]} S(x) = S(\frac{1}{3}) = \frac{5}{3} \qquad (4.3.3)$$

Trên AB ta có $x + y = 1$ và $x, y \in [0;1]$ suy ra $y = 1 - x$, thay vào hàm S(x; y) ta có:

$$S(x) = 6x^2 - 6x + 3$$

$$\Rightarrow \qquad \min_{[0;1]} S(x) = S(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2} \qquad (4.3.4)$$

Từ (4.3.1) đến (4.3.4) ta suy ra $\min_{D} S(x;y) = S(\frac{1}{3};\frac{1}{3}) = \frac{5}{3}$, với D là miền tam giác OAB.

Vậy ta có điểm $M(\frac{1}{3};\frac{1}{3})$ là điểm phải tìm.

6. Ứng dụng trong kinh tế

6.1. Trường hợp doanh nghiệp sản xuất hai loại sản phẩm

Xét trường hợp một doanh nghiệp cạnh tranh thuần tuý sản xuất hai loại sản phẩm Q_1; Q_2 và giả sử tổng chi phí kết hợp được tính theo số lượng sản phẩm:

$$TC = TC(Q_1; Q_2).$$

Do tính chất cạnh tranh doanh nghiệp phải chấp nhận giá thị trường các loại sản phẩm đó. Với p_1, p_2 là giá thị trường hai loại sản phẩm thì hàm tổng lợi nhuận có dạng:

$$\pi = p_1Q_1 + p_2Q_2 - TC(Q_1; Q_2)$$

Bài toán đặt ra trong trường hợp này là chọn một cơ cấu sản xuất $(Q_1; Q_2)$ để hàm tổng lợi nhuận đạt tối đa.

Ví dụ. Giả sử hàm tổng chi phí của một doanh nghiệp cạnh tranh là $TC = 6Q_1^2 + 3Q_2^2 + 4Q_1Q_2$ và giá sản phẩm là $p_1 = 60$, $p_2 = 34$. Khi đó tổng lợi nhuận là:

$$\pi = 60Q_1 + 34Q_2 - (6Q_1^2 + 3Q_2^2 + 4Q_1Q_2)$$

Điều kiện cần để đạt lợi nhuận tối đa là:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi}{\partial Q_1} = 60 - 12Q_1 - 4Q_2 = 0 \\ \dfrac{\partial \pi}{\partial Q_2} = 34 - 4Q_1 - 6Q_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q_1 = 4 \\ Q_2 = 3 \end{cases}$$

Mặt khác, ta lại có $\dfrac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1^2} = -12; \dfrac{\partial^2 \pi}{\partial Q_2^2} = -6; \dfrac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1 \partial Q_2} = -4$, do đó tại $(Q_1; Q_2) = (4; 3)$ điều kiện đủ $\left(\dfrac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1 \partial Q_2}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1^2} \cdot \dfrac{\partial^2 \pi}{\partial Q_2^2} = 16 - 72 = -56 < 0, \dfrac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1^2} = -12 < 0$ được thỏa mãn.

Vậy doanh nghiệp sẽ đạt lợi nhuận lớn nhất nếu sản sản xuất 4 đơn vị sản phẩm thứ nhất và 3 đơn vị sản phẩm thứ hai.

6.2. Tối đa hoá lợi nhuận của một doanh nghiệp độc quyền

Xét trường hợp một doanh nghiệp độc quyền sản xuất hai loại sản phẩm với hàm chi phí kết hợp $TC = TC(Q_1; Q_2)$.

Doanh nghiệp độc quyền định giá sản phẩm của mình căn cứ vào chi phí sản xuất và cầu của thị trường. Giả sử cầu của thị trường đối với các loại sản phẩm là:

$$Q_1 = D_1(p_1) \Leftrightarrow p_1 = D_1^{-1}(Q_1)$$

$$Q_2 = D_2(p_2) \Leftrightarrow p_2 = D_2^{-1}(Q_2)$$

Khi đó hàm lợi nhuận có dạng:

$$\pi = p_1Q_1 + p_2Q_2 - TC(Q_1; Q_2)$$

Căn cứ vào cầu của thị trường ta có thể biểu diễn tổng lợi nhuận theo Q_1, Q_2 là:

$$\pi = D_1^{-1}(Q_1).Q_1 + D_2^{-1}(Q_2).Q_2 - TC(Q_1; Q_2).$$

Theo phương pháp giải bài toán cực trị của hàm hai biến ta xác định được mức sản lượng Q_1, Q_2 để π đạt cực đại, từ đó suy ra giá tối ưu.

Ví dụ. Giả sử một doanh nghiệp độc quyền sản xuất hai loại sản phẩm với hàm chi phí kết hợp $TC = Q_1^2 + 5Q_1Q_2 + Q_2^2$. Giả sử hàm cầu hàng hoá của các loại sản phẩm đó là:

$$p_1 = 56 - 4Q_1,\ p_2 = 48 - 2Q_2.$$

Khi đó hàm lợi nhuận là:

$$\pi = p_1Q_1 + p_2Q_2 - (Q_1^2 + 5Q_1Q_2 + Q_2^2) = 56Q_1 + 48Q_2 - 5Q_1^2 - 3Q_2^2 - 5Q_1Q_2$$

Giải bài toán cực trị đối với hai biến Q_1, Q_2 ta xác định được mức sản lượng để doanh nghiệp đạt lợi nhuận tối đa là $(Q_1; Q_2) = (96/35; 40/7)$. Khi đó giá bán để đạt được lợi nhuận tối đa là $p_1 \approx 45$, $p_2 \approx 36.7$.

Bài tập chương 4

1. Tìm miền xác định và biểu diễn miền xác định các hàm số sau trên mặt phẳng tọa độ

a. $z = \ln xy$ b. $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ c. $z = \sqrt{x\ln y}$ d. $z=\sqrt{x.\sin}$

d. $z=\frac{1}{\sqrt{x+y}}+\frac{1}{\sqrt{x-y}}$ e. $z=\arcsin\frac{y-1}{x}$ g. $z=\sqrt{x^2-y^2}$ h. $z=\arcsin\frac{y}{x}+\sqrt{xy}$

2. Tính đạo hàm riêng cấp một của các hàm số sau

a. $z=\ln\left(\operatorname{tg}\frac{y}{x}\right)$ b. $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ c. $z=\ln(x^2+xy+y^2)$ d. $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$

3. Chứng tỏ hàm số $z = y.\ln(x^2 - y^2)$ thoả mãn phương trình

$$\frac{z'_x}{x}+\frac{z'_y}{y}=\frac{z}{y^2}$$

4. Chứng tỏ hàm số $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$ thoả mãn phương trình

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2$$

5. Tính đạo hàm riêng cấp hai của các hàm số sau

a. $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ b. $z = \ln(x^2 + y^2)$ c. $z = \frac{x-y}{x+y}$ d. $z = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)^3}$

6. Tính đạo hàm của các hàm số hợp sau

a. $z = e^{u-2v^2}, u = \cos x, v = \sqrt{x^2 + y^2}$

b. $z = \ln(u^2 + v^2), u = xy, v = \dfrac{x}{y}$

7. Cho $z = x^y$, hãy chứng minh $x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

8. Cho $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, hãy chứng minh $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

9. Cho $z = \ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, hãy chứng minh $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

9. Cho $z = e^{xy}$, hãy tính dz, d^2z.

10. Tính gần đúng

a. $\sqrt[3]{(1.02)^2 + (0.05)^2}$

b. $\sin 59^0.\cos 61^0$

11. Tính đạo hàm các hàm số ẩn xác định bởi phương trình:

a. $xe^y + ye^x - e^{xy} = 0$

b. $x + y + z = e^z$

12. Tìm cực trị của các hàm số sau:

a. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$

b. $z = x + y - xe^y$

c. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

d. $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$

e. $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$

f. $z = (x^2 + y^2).e^{-(x^2+y^2)}$

13. Tìm cực trị có điều kiện của các hàm số sau:

a. $z = xy$ với điều kiện $x + y = 1$

b. $z = x + 2y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 5$

c. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ với điều kiện $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$

14. Tính giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của các hàm số sau:

a. $z = x^2 - y^2$ trong hình tròn $x^2 + y^2 \leq 4$

b. $z = x^2y(4 - x - y)$ trong hình tam giác giới hạn bởi các đường thẳng $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.

15. Cho biết hàm lợi nhuận của một doanh nghiệp sản xuất hai loại sản phẩm là

$$\pi = 160Q_1 - 3Q_1^2 - 2Q_1Q_2 - 2Q_2^2 + 120Q_2 - 18$$

Hãy tìm $Q_1.Q_2$ để được lợi nhuận tối đa.

16. Một hãng độc quyền sản xuất hai loại sản phẩm. Cho biết hàm cầu đối với các loại sản phẩm đó là:

$$Q_1 = 25 - 0.5p_1,\ Q_2 = 30 - p_2$$

với hàm chi phí kết hợp $C = Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2 + 20$, hãy cho biết mức sản lượng Q_1, Q_2 cho lợi nhuận tối đa.

Chương 5

MA TRẬN - ĐỊNH THỨC - HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

§1. Ma trận

1. Định nghĩa ma trận

Một bảng số gồm m x n phần tử a_{ij} có dạng

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ hoặc } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

được gọi là một ma trận cấp m x n. Mỗi a_{ij} được gọi là một phần tử của ma trận.

Ta dùng các chữ cái A, B, C,... để đặt tên cho các ma trận và ta dùng ký hiệu $A = (a_{ij})_{m \times n}$ hoặc $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ để ký hiệu A là ma trận cấp m x n và phần tử nằm trên dòng i và cột j được ký hiệu là a_{ij}.

Ví dụ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ là ma trận cấp 2 x 3, trong đó các phần tử của A là $a_{11} = 1$, $a_{12} = 5$, $a_{13} = 4$, $a_{21} = -1$, $a_{22} = 3$, $a_{23} = 7$.

2. Các dạng ma trận

2.1. Ma trận vuông

Khi m = n thì $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ được gọi là ma trận vuông cấp n.

Trong ma trận vuông A đường chéo thứ nhất nối góc trên bên trái với góc dưới bên phải được gọi là đường chéo chính, các đường còn lại được gọi là đường chéo phụ. Vị trí của các phần tử a_{ij} so với đường chéo chính được xác định theo các chỉ số i, j như sau:

- a_{ij} thuộc đường chéo chính khi và chỉ khi $i = j$
- a_{ij} nằm phía trên đường chéo chính khi và chỉ khi $i < j$
- a_{ij} nằm phía dưới đường chéo chính khi và chỉ khi $i > j$

2.2. Ma trận tam giác

Ma trận tam giác là ma trận vuông có các phần tử nằm phía trên hoặc phía dưới của đường chéo chính bằng không.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ hoặc } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

2.3. Ma trận đường chéo, ma trận đơn vị

Ma trận vuông $A = (a_{ij})_{n \times n}$ được gọi là ma trận đường chéo nếu tất cả các phần tử nằm phía trên và phía dưới đường chéo chính đều bằng không.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ma trận đường chéo có tất cả các phần tử thuộc đường chéo chính bằng 1 được gọi là ma trận đơn vị. Ký hiệu là E.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

2.4. Ma trận dòng, ma trận cột

Khi m = 1 thì ma trận A có dạng $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$ được gọi là ma trận dòng.

Khi n = 1 thì ma trận A có dạng $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ được gọi là ma trận cột.

2.5. Ma trận không

Ma trận không là ma trận có tất cả các phần tử bằng đều 0, ký hiệu là O.

2.5. Ma trận chuyển vị

Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m \times n}$, khi đó ma trận $B = (a_{ji})_{n \times m}$ được gọi là ma trận chuyển vị của ma trận A. Kí hiệu là A^t.

Ví dụ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ thì $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

3. Hai ma trận bằng nhau

Hai ma trận A và B được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng cấp và các phần tử cùng vị trí bằng nhau, tức là:

i. $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$

ii. $a_{ij} = b_{ij}$ với mọi i và j.

Khi đó ta viết A = B.

Ví dụ.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, nghĩa là a = 1. b = 2, c = 3 và d = 4.

4. Các phép toán đối với ma trận

4.1. Phép cộng ma trận và phép nhân ma trận với một số

4.1.1. Phép cộng hai ma trận. Cho hai ma trận cùng cấp $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$. Tổng của hai ma trận A và B là ma trận cấp m x n được xác định như sau:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$$

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ thì

$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 8 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

4.1.2. Phép nhân ma trận với một số. Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ và số thực λ. Tích của ma trận A với số thực λ là ma trận cấp m x n được xác định như sau:

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{m\times n}$$

Đặc biệt khi $\lambda = -1$ thì $-A = (-a_{ij})_{m\times n}$ được gọi là ma trận đối của ma trận A.

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ thì $5A = \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 10 & 20 \end{pmatrix}$

4.1.3. Tính chất.

Cho A, B, C là các ma trận cấp m x n và các số thực α, β. Khi đó ta có:

i. A + B = B + A

ii. (A + B) + C = A + (B + C)

iii. A + O = A

iv. $A + (-A) = O$

v. $1.A = A$

vi. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

vii. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

viii. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$

4.2. Phép trừ hai ma trận

Định nghĩa. Cho hai ma trận cùng cấp $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$. Hiệu của hai ma trận A và B là ma trận cấp m x n được xác định như sau:

$$A - B = (a_{ij} - b_{ij})_{m \times n}$$

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ thì $A - B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

4.3. Phép nhân hai ma trận

Định nghĩa. Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m \times p}$ và $B = (b_{ij})_{p \times n}$. Tích của ma trận A với ma trận B là ma trận cấp m x n được xác định như sau:

$$AB = (c_{ij})_{m \times n}, \text{ trong đó } c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \text{ với } i = \overline{1;n},\ j = \overline{1;m}$$

Chú ý. Để thực hiện phép nhân ma trận với ma trận theo định nghĩa trên ta cần lưu ý một số điểm sau:

i. Chỉ nhân được AB khi số số cột của ma trận A phải bằng số hàng của ma trận B.

ii. Ma trận tích AB có số hàng bằng số hàng của ma trận A và có số cột bằng số cột của ma trận B.

iii. Khi nhân AB và BA được nhưng chưa chắc đã có AB = BA, tức phép nhân ma trận với ma trận không có tính chất giao hoán.

Ví dụ.

- $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 15 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11 \end{pmatrix}$

Tính chất. Với giả thiết các phép tính viết ở dưới đây thực hiện được, ta có:

i. $A(B + C) = AB + AC$

ii. $A(BC) = (AB)C$

iii. $k(AB) = A(kB)$

iv. $(AB)^t = B^t A^t$

v. $AE = EA = A$

§2. Định thức

1. Định thức của ma trận vuông

Xét ma trận cấp n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ta chú ý đến phần tử a_{ij}, bỏ đi hàng i và cột j ta thu được ma trận cấp n – 1. Ta ký hiệu là M_{ij} và gọi nó là ma trận con của ma trận A ứng với phần tử a_{ij}.

Ví dụ.

Xét ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ có 9 ma trận con sau:

$$M_{11} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}, \qquad M_{12} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}, \qquad M_{13} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$M_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}, \qquad M_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}, \qquad M_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$M_{31} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad M_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \qquad M_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Định nghĩa. Định thức của ma trận A, ký hiệu là det(A) hoặc $|A|$ được định nghĩa dần dần như sau:

A là ma trận cấp 1: $A = (a_{11})$ thì $\det(a) = a_{11}$

A là ma trận cấp 2: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ thì $\det(A) = a_{11}\det(M_{11}) - a_{12}\det(M_{12}) = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

……………………………………………

A là ma trận cấp n: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ thì

$$\det(A) = a_{11}.\det(M_{11}) - a_{12}.\det(M_{12}) + \ldots + (-1)^{n+1}a_{1n}.\det(M_{1n}) \tag{5.2.1}$$

Định thức của ma trận cấp n được gọi là định thức cấp n.

Ví dụ.

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$ thì $\det(A) = 2.|9| - 3.|8| = -6$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ thì $\det(A) = 1.\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2.\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3.$

  $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 0$

2 Tính chất của định thức

2.1. Tính chất 1

Định thức của ma trận vuông bằng định thức của ma trận chuyển vị của nó, tức là:

$$\det(A) = \det(A^t)$$

Ví dụ.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$ thì $\det(A) = -6$; $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ thì $\det(A^t) = -6$.

Vậy $\det(A) = \det(A^t)$.

Hệ quả. Một tính chất đã đúng khi phát biểu về hàng của định thức thì nó vẫn còn đúng trong khi ta phát biểu thay hàng bởi cột.

2.2. Tính chất 2

Nếu trong định thức ta đổi chỗ hai dòng (hay hai cột) và giữ nguyên vị trí của các dòng (các cột) còn lại thì định thức đổi dấu.

Ví dụ. $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -3$, đổi chỗ hàng một và hàng hai cho nhau ta được $\begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 3$.

2.3. Tính chất 3

Một dịnh thức có hai hàng (hay hai cột) như sau thì bằng không.

2.4. Tính chất 4

Dựa vào định nghĩa (5.2.1) và tính chất 2 ta có:

i. Cố định hàng thứ i (i = 1, 2,...,n) ta có:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(M_{ij}) \qquad (5.2.2)$$

ii. Cố định hàng thứ j (j = 1, 2,...,n) ta có:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(M_{ij}) \qquad (5.2.3)$$

Công thức (5.2.2) còn được gọi là khai triển của định thức theo hàng i, công thức (5.2.3) còn được gọi là khai triển định thức theo cột j.

Ví dụ.

Xét định thức $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix}$

Áp dụng công thức (5.2.2) với i = 3 ta có:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{3} (-1)^{3+j} a_{3j} \det(M_{3j}) = 7\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 240.$$

Áp dụng công thức (5.2.3) với j = 2 ta có:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+2} a_{i2} \det(M_{i2}) = -2\begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 240.$$

Hệ quả. Một định thức có một hàng (hay một cột) toàn số không thì bằng không

2.5. Tính chất 5

Khi nhân các phần tử của một hàng (hay một cột) với cùng một số k thì được một định mới bằng định thức cũ nhân với k.

Hệ quả. Khi các phần tử của một hàng (hay một cột) có thừa số chung. ta có thể đưa thừa số chung đó ra ngoài dấu định thức.

Ví dụ.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4.1 & 4.2 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4(4-5) = -4$$

2.6. Tính chất 6

Một định thức có hai hàng (hay hai cột) tỷ lệ thì bằng không.

2.7. Tính chất 7

Khi tất cả các phần tử của một hàng (hay một cột) có dạng tổng của hai số hạng thì định thức có thể phân tích thành tổng của hai định thức, chẳng hạn như:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} + a''_{12} \\ a_{21} & a'_{22} + a''_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} \\ a_{21} & a'_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a''_{12} \\ a_{21} & a''_{22} \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a'_{12} + a''_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

2.8. Tính chất 8

Khi ta cộng bội k của một hàng vào một hàng khác (hay bội k của một cột vào một cột khác) thì được một định mới bằng định thức cũ.

Ví dụ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \overset{2H_1+H_3 \to H_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \\ -2.1+2 & -2.2+3 & -2.4+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -7 \end{vmatrix}$$

Chú ý. Áp dụng cách biến đổi như trên ta đã đưa định thức đã cho về một định thức mới đơn giản hơn (cụ thể là phần tử $a_{31} = 0$).

2.9. Tính chất 9

Định thức của ma trận có dạng tam giác bằng tích các phần tử nằm trên đường chéo chính.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22}....a_{nn}$$

2.10. Tính chất10

Nếu A, B là hai ma trận vuông cùng cấp thì ta có det(AB) = det(A)det(B)

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ khi đó $AB = \begin{pmatrix} 14 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$

suy ra det(AB) = 45.

Mặt khác ta có det(A) = -5, det(B) = -9, suy ra det(A)det(B) = 45.

Vậy ta có det(AB) = det(A)det(B).

3. Cách tính định thức bằng biến đổi sơ cấp

3.1. Các phép biến đổi sơ cấp

Biến đổi sơ cấp	Tác dụng	Lí do
Nhân một hàng (hay một cột) với một số $k \neq 0$	Định thức nhân với k	Tính chất 5

Đổi chỗ hai hàng (hay hai cột)	Định thức đổi dấu	Tính chất 2
Cộng bội k của một hàng (hay một cột) vào một hàng (hay một cột) khác	Định thức không đổi	Tính chất 8

3.2. Cách tính

Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp đưa định thức cần tính về dạng tam giác, sau đó áp dụng tính chất 9 để tính.

Ví dụ 1. Tính định thức $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$

Ta có

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \overset{H_1 \leftrightarrow H_2}{=} -\begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \overset{-2H_1 + H_3 \to H_3}{=}$$

$$-3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{-10H_2+H_3\to H_3}{=} -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix} = -3.1.1.(-55) = 165 .$$

Ví dụ 2. Tính định thức cấp n có tất cả các phần tử thuộc đường chéo chính bằng x, còn tất cả các phần tử nằm ngoài đường chéo chính bằng a.

$$\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

Ta có:

$$\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix} \overset{C_n+C_{n-1}+\ldots+C_1\to C_1}{=} \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ a+(n-1)a & x & a & \cdots & a \\ a+(n-1)a & a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+(n-1)a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$\underset{i=2,3,\ldots,n}{\overset{-H_1+H_i\to H_i}{=}}$$

$$\overset{-H_1+H_i \to H_i}{\underset{i=2,3,\dots,n}{=}} \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

§3. Ma trận nghịch đảo

1. Định nghĩa

Cho A là ma trận vuông cấp n, ma trận nghịch đảo của ma trận A là ma trận vuông cấp n X thoả mãn điều kiện AX = XA = E.

Kí hiệu $X = A^{-1}$, vậy $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Ví dụ. Ma trận $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ có ma trận nghịch đảo là ma trận $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ vì:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Sự duy nhất của ma trận nghịch đảo

Định lí. Ma trận nghịch đảo của ma trận A (nếu có) là duy nhất.

Chứng minh.

Giả sử B và C đều là ma trận nghịch đảo của ma trận A , tức là:

$$AB = BA = E, AC = CA = E$$

Từ AB = E ta suy ra:

$$C(AB) = CE$$

$$\Leftrightarrow \quad (CA)B = C$$

$$\Leftrightarrow \quad EB = C$$

$$\Leftrightarrow \quad B = C$$

3. Điều kiện tồn tại ma trận nghịch đảo và biểu thức của nó

Định lí. Điều kiện cần và đủ để ma trận vuông $A = (a_{ij})_{n \times n}$ có ma trận nghịch đảo là $|A| \neq 0$. Khi đó ma trận nghịch đảo của ma trận A được tính theo công thức:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot C^t = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}, \text{ trong đó}$$

$c_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij})$ với M_{ij} là ma trận con của ma trận A tương ứng với phần tử a_{ij}.

Ví dụ. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

Ta có det(A) = -1 $\neq 0$ nên ma trận A tồn tại ma trận nghịch đảo A^{-1} được tính theo công thức:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}C' = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix}$$, trong đó:

$c_{11} = 40$, $c_{12} = -13$, $c_{13} = -5$

$c_{21} = -16$, $c_{22} = 5$, $c_{23} = 2$

$c_{31} = -9$, $c_{32} = 3$, $c_{33} = 1$.

vậy ta được $A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Tính chất.

4.1. Tính chất 1. Nếu ma trận A có ma trận nghịch đảo thì $(A^{-1})^{-1} = A$ và $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

4.2. Tính chất 2. Nếu hai ma trận vuông A và B có ma trận nghịch đảo thì ma trận AB cũng có ma trận nghịch đảo và $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Thật vậy, ta có:

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E$$

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A^{-1}(BB^{-1})A = A^{-1}EA = A^{-1}A = E$$

Theo định nghĩa ma trận nghịch đảo ta suy ra $B^{-1}A^{-1}$ là ma trận nghịch đảo của ma trận AB.

5. Cách tính ma trận nghịch đảo bằng biến đổi sơ cấp

Để tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của ma trận vuông $A = (a_{ij})_{n\times n}$, trước hết ta lập một ma trận cấp n x 2n

$$(A, E_n) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

sau đó sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên các hàng như nhân một hàng với một số khác không, cộng bội k của một hàng vào một hàng khác để đưa ma trận (A, E_n) về dạng:

$$(E_n, B) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right)$$

Khi đó, ma trận $B = (b_{ij})_{n\times n}$ chính là ma trận A^{-1} cần tìm.

Ví dụ. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ta có

$$(A,E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-H_2+H_1\to H_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-4H_1+H_3\to H_3]{-H_1+H_2\to H_2}$$

$$\xrightarrow[-4H_1+H_3\to H_3]{-H_1+H_2\to H_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -4 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{3}H_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -4 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-4H_2+H_3\to H_3}$$

$$\xrightarrow{-4H_2+H_3\to H_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & -8/3 & 4/3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{3}{2}H_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 2 & 3/2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{3}H_3+H_2\to H_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 2 & 3/2 \end{array}\right)\xrightarrow{H_2+H_1\to H_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 2 & 3/2 \end{array}\right).$$

Vậy ma trận nghịch đảo của ma trận A là:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1/2 \\ 1 & 0 & -1/2 \\ -4 & 2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

§4. Hạng của ma trận

1. Hạng của ma trận

Xét ma trận cấp mxn

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Gọi p là số nguyên dương thoả mãn $0 < p \le \min\{m,n\}$, ta gọi ma trận vuông cấp p suy ra từ ma trận A bằng cách bỏ đi m – p hàng và n – p cột là ma trận con cấp p của ma trận A và định thức của ma trận con đó gọi là định thức con cấp p của ma trận A.

Chú ý. Có $C_m^p.C_n^p$ định thức con cấp p của ma trận A .

Ví dụ.

Xét ma trận cấp 3x4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

ta có $\min\{3,5\} = 3$ suy ra p = 1, 2, 3.

Các định thức con cấp 3 của ma trận A là:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = 0$$

Các định thức con cấp 2 là:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0, \ldots$$

Định nghĩa. Hạng của ma trận A là cấp cao nhất của các định thức con khác không của A. Ta ký hiệu hạng của ma trận A là r(A).

Ví dụ. xét ví dụ ở phần 1 ta có các định con cấp 3 đều bằng 0, tồn tại định thức con cấp 2 khác 0 nên r(A) = 2.

Tính chất. Vì với mọi ma trận vuông A ta đều có det(A) = det(A^t) nên r(A) = r(A^t).

2. Cách tính hạng của ma trận bằng biến đổi sơ cấp

2.1. Ma trận bậc thang

Ma trận bậc thang là ma trận có 2 tính chất sau:

i. Các hàng khác không (tức hàng có phần tử khác không) luôn ở phía trên các hàng không (tức hàng có tất cả các phần tử đều bằng không).

ii. Trên hai hàng khác không thì phần tử khác không đầu tiên ở hàng dưới bao giờ cũng nằm ở bên phải cột chứa phần tử khác không đầu tiên ở hàng trên.

Ví dụ.

Các ma trận sau là ma trận có dạng bậc thang: $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

Các ma trận sau không phải là ma trận có dạng bậc thang: $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 10 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Nhận xét. *Hạng của một ma trận có dạng bậc thang đúng bằng số hàng khác không của nó.*

2.2. Cách tính hạng của ma trận.

Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp về hàng và cột của ma trận như:

i. Đổi chỗ hai hàng, hai cột của ma trận,

ii. Nhân một hàng, một cột của ma trận với một số khác không.

iii. Cộng bội k của một hàng (một cột) vào một hàng (một cột) khác.

để đưa ma trận cần tính hạng về dạng ma trận bậc thang. Căn cứ vào số hàng khác không của ma trận bậc thang để kết luận hạng của ma trận cần tính.

Ví dụ 1. Tính hạng của ma trận sau

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ta có

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[-2H_1+H_2\to H_2]{H_1+H_3\to H_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{5}{7}H_2+H_3\to H_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ma trận cuối cùng là một ma trận bậc thang có hai hàng khác không nên r(A) = 2.

Ví dụ 2. Biện luận theo m hạng của ma trận sau

Ta có

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & m & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & m & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_3\leftrightarrow C_5]{C_2\leftrightarrow C_5} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 & m & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{2H_1+H_2\to H_2 \\ H_1+H_3\to H_3 \\ 2H_1+H_4\to H_4}}$$

$$\xrightarrow[2H_1+H_4\to H_4]{\substack{2H_1+H_2\to H_2\\ H_1+H_3\to H_3}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & m+2 \\ 0 & 0 & 0 & m+1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{-H_2+H_4\to H_4}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & m+2 \\ 0 & 0 & 0 & m+1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3-m \end{pmatrix}$$

Nếu $m \neq 3$ thì $r(A) = 4$, còn nếu $m = 3$ thì $r(A) = 3$.

§5. Hệ phương trình tuyến tính

1. Hệ phương trình Cramer

1.1. Định nghĩa.

Xét hệ phương trình với n phương trình, n ẩn số có dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

(5.5.1)

Ta gọi ma trận $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ là ma trận hệ số, ma trận ẩn và ma trận vế phải của hệ phương trình (5.5.1).

Khi đó với phép nhân ma trận với ma trận, hệ (5.5.1) tương đương với hệ phương trình:

$$AX = B \qquad (5.5.2)$$

ta gọi (5.5.2) là dạng ma trận của hệ phương trình (5.5.1).

Hệ phương trình (5.5.1) được gọi là hệ phương trình Cramer nếu định thức của ma trận hệ số A khác không.

1.2. Cách giải hệ phương trình Cramer

1.2.1. Phương pháp ma trận

Xét hệ Cramer (5.5.2) AX = B. do ma trận hệ số A có $\det(A) \neq 0$ nên tồn tại ma trận nghịch đảo A^{-1}. Nhân hai vế của phương trình (5.5.2) với A^{-1} về bên trái ta được hệ thức tương đương:

$$X = A^{-1}B \qquad (5.5.3)$$

Như vậy hệ (5.5.2) có nghiệm duy nhất được xác định bởi (5.5.3).

Ví dụ. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$$

Ta có. phương trình đã cho tương đương đương với phương trình AX = B, trong đó:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

do det(A) = 20 $\neq$ 0 nên hệ đã cho là hệ Cramer.

Ma trận nghịch đảo của ma trận A là:

$$A^{-1} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 7 & -10 & 11 \\ 1 & 10 & -7 \\ -5 & 10 & -5 \end{pmatrix}.$$

Áp dụng công thức (5.5.3) ta có:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}B = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 7 & -10 & 11 \\ 1 & 10 & -7 \\ -5 & 10 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vậy nghiệm duy nhất của hệ là (x_1; x_2; x_3) = (2; -1; 1).

1.2.2. Quy tắc Cramer

Định lý. Nghiệm duy nhất (x_1; x_2;...;x_n) của hệ (5.5.2) được xác định bởi công thức

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}, j = 1,2...,n.$$

trong đó A_j là ma trận cấp n có được từ ma trận A bằng cách thay cột thứ j bởi ma trận vế phải B.

Ví dụ . Giải hệ phương trình Cramer

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 16 \end{cases}$$

Ta có ma trận hệ số $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, ma trận vế phải

$$B = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 14 & 2 & -3 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 2 \\ 1 & 14 & -3 \\ 3 & 16 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 14 \\ 3 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x_1; x_2; x_3)$ được tính theo công thức:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\det(A_1)}{\det(A)} = \dfrac{-12}{-6} = 2 \\ x_2 = \dfrac{\det(A_2)}{\det(A)} = \dfrac{-18}{-6} = 3 \\ x_3 = \dfrac{\det(A_3)}{\det(A)} = \dfrac{12}{-6} = -2 \end{cases}$$

1.2.3. Phương pháp Gauss

Xét hệ phương trình (5.5.1) có dạng ma trận (5.5.2) với ma trận hệ số A.

a. Hệ tam giác trên

Hệ tam giác trên là hệ phương trình tuyến tính có dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

có ma trận hệ số là một ma trận có dạng tam giác

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

với giả thiết $a_{ii} \neq 0$, việc giải hệ phương trình có dạng tam giác rất đơn giản, phương trình cuối cho ngay x_n, phương trình liền kề cho ta x_{n-1}... phương trình đầu cho ta x_1.

b. Cách giải. Ta lập ma trận $(A|B)$ cấp nx(n + 1) có dạng

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng biến đổi ma trận $(A|B)$ sao cho ma trận có dạng tam giác. Hệ tam giác cuối cùng thu được tương đương với hệ phương trình đã cho, giải hệ tam giác này ta được nghiệm của hệ phương trình đã cho.

Ví dụ. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \\ 4x_1 + 11x_2 + 7x_3 = 7 \end{cases}$$

Áp dụng các phép biến đổi sơ cấp về hàng tác động lên ma trận $(A|B)$ để đưa ma trận A về dạng tam giác. Ta có:

$$(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \\ 4 & 11 & 7 & 7 \end{array}\right) \overset{\substack{-1.5H_1+H_2\to H_2 \\ 2H_1+H_3\to H_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -6.5 & -8 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right) \overset{0.6H_2+H_3\to H_3}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -6.5 & -8 \\ 0 & 0 & -2.9 & -5.8 \end{array}\right)$$

Vậy hệ đã cho tương đương với hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2+3x_3=4 \\ \quad -5x_2-6.5x_3=-8 \\ \qquad -2.9x_3=-5.8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-1 \\ x_3=2 \end{cases}.$$

2. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát.

2.1. Định nghĩa.

Hệ phương trình tuyến tính tổng quát là hệ gồm m phương trình với n ẩn số $x_1, x_2, \ldots, x_n$ có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \qquad (5.5.4)$$

trong đó a_{ij} là hệ số ở phương trình thứ i của ẩn x_j, b_i là vế phải của phương trình thứ i.

Khi m = n thì hệ (5.5.4) là một hệ vuông gồm n phương trình với n ẩn số.

Khi $b_i = 0\ \forall i = 1,2,\ldots n$ thì hệ (5.5.4) được gọi là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.

Ta gọi ma trận $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$,

$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ là ma trận hệ số, ma trận ẩn, ma trận vế phải và ma trận bổ sung của hệ phương trình (5.5.4).

Khi đó với phép nhân ma trận với ma trận, hệ (5.5.1) tương đương với hệ phương trình:

$$AX = B \qquad (5.5.5)$$

ta gọi (5.5.5) là dạng ma trận của hệ phương trình (5.5.4).

Ví dụ.

- $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 5 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = -4 \end{cases}$ là hệ gồm hai phương trình với 3 ẩn số.

- $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_1 - x_2 = 5 \end{cases}$ là hệ gồm ba phương trình với 2 ẩn số.

- $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$ là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.

2.2. Điều kiện có nghiệm

Định lí Kronecker-Capelli. Điều kiện cần và đủ để hệ (5.5.4) có nghiệm là $r(A) = r(\overline{A})$.

Ta công nhận định lí trên.

Chú ý. Từ định lí ta suy ra:

- $r(A) \neq r(\overline{A})$ thì hệ (5.5.4) vô nghiệm
- $r(A) = r(\overline{A}) = n$ thì hệ có nghiệm duy nhất.
- $r(A) = r(\overline{A}) < n$ thì hệ có vô số nghiệm.

Ví dụ. Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + ax_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 - ax_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = b \end{cases}$$

a. Xác định a, b để hệ có nghiệm duy nhất.

b. Xác định a, b để hệ có vô số nghiệm.

c. Xác định a, b để hệ vô nghiệm.

Giải.

Xét ma trận bổ sung $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 3 \\ 3 & -1 & -a & 2 \\ 2 & 1 & 3 & b \end{array}\right)$, ta có:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 3 \\ 3 & -1 & -a & 2 \\ 2 & 1 & 3 & b \end{array}\right) \xrightarrow[-2H_1+H_3 \to H_3]{-3H_1+H_2 \to H_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 3 \\ 0 & -7 & -4a & -7 \\ 0 & -3 & 3-2a & b-6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{3}{7}H_2+H_3 \to H_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 3 \\ 0 & -7 & -4a & -7 \\ 0 & 0 & 3-\dfrac{2a}{7} & b-3 \end{array}\right).$$

a. Để hệ có nghiệm duy nhất thì

$$r(A) = r(\overline{A}) = 3 \Leftrightarrow 3 - \frac{2a}{7} \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \frac{21}{2}.$$

b. Để hệ có vô số nghiệm thì $r(A) = r(\overline{A}) < 3$, do $\rho(A) = 2$ vì tồn tại $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$ nên hạng của ma trận bổ sung phải bằng 2. Điều này tương đương với $\begin{cases} 3 - \dfrac{2a}{7} = 0 \\ b - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 21/2 \\ b = 3 \end{cases}$

c. Để hệ vô nghiệm thì $r(A) \neq r(\overline{A})$, điều này tương đương với $\begin{cases} 3 - \dfrac{2a}{7} = 0 \\ b - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 21/2 \\ b \neq 3 \end{cases}$

Kết luận: Hệ có nghiệm duy nhất thì $\begin{cases} a \neq 21/2 \\ b \in R \end{cases}$

Hệ có vô số nghiệm thì $\begin{cases} a = 21/2 \\ b = 3 \end{cases}$

Hệ vô nghiệm thì $\begin{cases} a = 21/2 \\ b \neq 3 \end{cases}$.

2.3. Cách giải hệ phương trình tuyến tính tổng quát

Xét hệ phương trình (5.5.5) với $r(A) = r(\overline{A}) = k \leq n$. Nếu k = n thì (5.5.5) chính là hệ phương trình Cramer.

Nếu k < n thì khi đó trong A tồn tại một định thức con cấp k khác không ta gọi định con đó là định thức con chính. Các phần tử của định thức con chính nằm ở k phương trình ta gọi là các phương trình chính và là hệ số của k ẩn gọi là các ẩn chính. Các ẩn còn lại gọi là ẩn phụ. Khi đó hệ đã cho tương đương với một hệ gồm k phương trình ta gọi là hệ con chính. Trong hệ con chính ta chuyển các ẩn phụ sang vế phải ta được hệ gồm k phương trình với k ẩn. Giải hệ con đó đối với ẩn chính ta được nghiệm của hệ phụ thuộc vào vế phải và các ẩn phụ.

Chú ý. Nếu đã đưa ma trận bổ sung $\overline{A}$ về dạng bậc thang thì ta nên lấy một định thức con cấp k khác không của ma trận bậc thang làm định thức con chính.

Ví dụ. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

Ta có ma trận hệ số A và $\overline{A}$ là

$$A=\begin{pmatrix}1 & 5 & 4 & 3\\ 2 & -1 & 2 & -1\\ 5 & 3 & 8 & 1\end{pmatrix},\ \overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 5 & 4 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0\\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1\end{array}\right)$$

dễ thấy $r(A)=r(\overline{A})=2$ nên hệ đã cho có vô số nghiệm. Chọn $\begin{vmatrix}1 & 5\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-11\neq 0$ làm định thức con chính, khi đó hệ đã cho tương đương với hệ phương trình:

$$\begin{cases}x_1+5x_2=1-4x_3-3x_4\\ 2x_1-x_2=-2x_3+x_4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-\dfrac{14}{11}t+\dfrac{2}{11}s+\dfrac{1}{11}\\ x_2=-\dfrac{6}{11}t-\dfrac{7}{11}s+\dfrac{2}{11}\\ x_3=t\in R\\ x_4=s\in R\end{cases}$$

3. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

3.1. Định nghĩa. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất là hệ phương trình có dạng

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=0\end{cases}\qquad(5.5.6)$$

dạng ma trận là AX = O, trong đó A là ma trận hệ số, X là ma trận ẩn, O là ma trận vế phải.

Nhận xét. Hệ phương trình (5.5.6) luôn có một nghiệm $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (0, 0, \ldots, 0)$ gọi là nghiệm tầm thường.

3.2. Điều kiện tồn tại nghiệm không tầm thường

Định lí. Điều kiện cần và đủ để hệ (5.5.6) có nghiệm không tầm thường là hạng của ma trận hệ số của nó nhỏ hơn số ẩn, tức là $r(A) < n$.

Hệ quả 1. Một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất với số phương trình bằng số ẩn có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi định thức của ma trận hệ số bằng không.

Thậy vậy, khi $m = n$ thì ma trận hệ số của hệ là ma trận vuông cấp n. Hạng của ma trận vuông cấp n nhỏ hơn n khi và chỉ khi định thức của nó bằng không.

Hệ quả 2. Mọi hệ phương trình tuyến tính thuần nhất với số phương trình nhỏ hơn số ẩn đều có nghiệm không tầm thường.

Thậy vậy, hạng của ma trận hệ số của hệ không thể vượt quá số phương trình của hệ, tức là $r(A) \le m$. Do đó nếu $m < n$ thì điều kiện $r(A) < n$ được thoả mãn.

Ví dụ. Tìm điều kiện để hệ phương trình sau có nghiệm không tầm thường

$$\begin{cases} ax + y + z = 0 \\ 2x + 3y + 5z = 0 \\ x - y + az = 0 \end{cases}$$

Ta có ma trận hệ số của hệ phương trình là

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$$

để hệ chỉ có nghiệm tầm thường thì $\det(A) \neq 0$, điều này tương đương với

$$3a(a+1) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad a \neq 0 \text{ và } a \neq -1.$$

Bài tập chương 5

1. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 1 & 9 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 6 & 8 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

hãy tính $(A + B) + C$, $5A$, A^t.

2. Hãy nhân các ma trận sau

a. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

3. Hãy thực hiện các phép tính sau

a. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^3$ b. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n$ c. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$ d. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}^n$ e. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$

g. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n$ h. $\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}^n$

4. Chứng minh rằng ma trận $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ thoả mãn phương trình

$X^2 - (a + d)X + (ad - bc)E = 0.$

5. Tính các định thức cấp hai,cấp ba sau

a. $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$ b. $\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$ c. $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ d. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$ e. $\begin{vmatrix} tg\alpha & -1 \\ 1 & tg\alpha \end{vmatrix}$

g. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ h. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ i. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ k. $\begin{vmatrix} x & a & a \\ -a & x & -a \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$ h. $\begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix}$

6. Tính định thức

a. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0.143 & 3 \\ 3 & 2 & 0.327 & 7 \\ 4 & 6 & 0.468 & 8 \\ 7 & 5 & 0.759 & 9 \end{vmatrix}$ b. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ c. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

d. $\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$

7. Biết rằng các số 204, 527, 255 chia hết cho 17. Hãy chứng minh:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} \vdots 17$$

8. Giải các phương trình

a. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} = 0$ b. $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ 1 & 2 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$

9. Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau (nếu có)

a. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ g. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

h. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

10. Cho ma trận chéo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \text{ trong đó } a_{11}.a_{22}\ldots a_{nn} \neq 0.$$

Hãy tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A.

11. Giải các phương trình ma trận sau

a. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b. $X\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ c.

$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

12. Tìm hạng của các ma trận sau

a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

13. Tìm hạng của các ma trận sau tuỳ theo giá trị của λ

a. $\begin{pmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -\lambda & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -\lambda & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -\lambda & 1 \end{pmatrix}$

14. Giải các hệ phương trình Cramer sau

a. $\begin{cases} 2x-2y-z=-1 \\ y+z=1 \\ -x+y+z=-1 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y+z=2 \\ 3x+y+2z=0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2x-y-z=4 \\ 3x+4y-2z=11 \\ 3x-2y+4z=11 \end{cases}$

15. Giải các hệ phương trình tuyến tính sau

a. $\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3+x_4=4 \\ 4x_1+3x_2-x_3+2x_4=6 \\ 8x_1+5x_2-3x_3+4x_4=12 \\ 3x_1+3x_2-2x_3+2x_4=6 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+11x_3+5x_4=2 \\ x_1+x_2+5x_3+2x_4=1 \\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4=-3 \\ x_1+x_2+3x_3+4x_4=-3 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1-2x_2+x_3-x_4=-1 \\ x_1-2x_2+x_3+5x_4=5 \end{cases}$

16. Giải và biện luận các hệ phương trình tuyến tính sau

a. $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y + az = 4 \\ 4x + 9y + a^2z = 16 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x + y + (1-m)z = m + 2 \\ (1+m)x - y + 2z = 0 \\ 2x - my + 3z = m + 2 \end{cases}$

17. Xác định a để hệ sau có nghiệm không tầm thường

a. $\begin{cases} ax - 3y + z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$ b. $\begin{cases} ax + y + z = 0 \\ 2x + 3y + 5z = 0 \\ x - y + az = 0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} (1-a)x + 2y = 0 \\ 2x + (4-a)y = 0 \end{cases}$

Chương 6

KHÔNG GIAN VÉC TƠ

§1. Véc tơ n chiều và không gian véc tơ

1. Khái niệm véc tơ n chiều

Định nghĩa 1. Mỗi bộ số thực có thứ tự $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ được gọi là một véc tơ n chiều.

Ký hiệu các véc tơ n chiều bởi $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \ldots$, chẳng hạn để kí hiệu véc tơ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ta viết:

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ hoặc } \vec{x}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Định nghĩa 2. Hai véc tơ $\vec{x}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và $\vec{y}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi $x_i = y_i$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$.

Để kí hiệu hai véc tơ $\vec{x}$ và $\vec{y}$ bằng nhau, ta viết $\vec{x} = \vec{y}$.

2. Các phép toán véc tơ

2.1. Định nghĩa phép cộng và phép nhân véc tơ với một số

2.1.1. Phép cộng hai véc tơ

Định nghĩa. Tổng của hai véc tơ n chiều $\vec{x}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và $\vec{y}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ là một véc tơ n chiều, kí hiệu là $\vec{x}+\vec{y}$ và được xác định như sau:

$$\vec{x}+\vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n).$$

2.1.2. Phép nhân véc tơ với một số

Định nghĩa. Tích của véc tơ n chiều $\vec{x}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ với một số thực α là một véc tơ n chiều, kí hiệu là $\alpha.\vec{x}$ và được xác định như sau:

$$\alpha.\vec{x} = (\alpha x_1, \alpha.x_2, \ldots, \alpha.x_n)$$

Ví dụ. Cho hai véc tơ $\vec{x}(3; -1; 5; 3)$ và $\vec{y}(0; 5; 4; 5)$, khi đó ta có:

$\vec{x}+\vec{y} = (3; 4; 9; 8)$; $2\vec{x} = (6; -2; 10; 6)$.

$2\vec{x} + 3\vec{y} = (6; 13; 22; 21)$.

2.2. Véc tơ không và véc tơ đối của một véc tơ

2.2.1. Véc tơ không.

Định nghĩa. Véc tơ không là véc tơ có tất cả các phần tử đều bằng không.

Trong tập hợp các véc tơ n chiều (với n cố định) có một véc tơ không duy nhất kí hiệu là $\vec{\theta}_n$ hoặc $\vec{\theta}$.

$$\vec{0}_n = (0; 0; \ldots; 0)$$

2.2.2. Véc tơ đối của một véc tơ.

Định nghĩa. Véc tơ đối của một véc tơ $\vec{x}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là tích của véc tơ đó với số -1. Ta kí hiệu véc tơ đối của véc tơ $\vec{x}$ là -$\vec{x}$.

$$-\vec{x} = (-1)\vec{x} = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$$

2.3. Các tính chất đặc trưng của phép cộng và phép nhân véc tơ với một số

Giả sử $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ là các véc tơ n chiều, α và β là các số thực bất kỳ, ta có:

i. $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$

ii. $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$

iii. $\vec{x} + \vec{\theta} = \vec{x}$

iv. $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{\theta}$

v. $1.\vec{x} = \vec{x}$

vi. $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$

vii. $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$

viii. $(\alpha\beta)\vec{x} = \alpha(\beta\vec{x})$

2.4. Phép trừ hai véc tơ

Định nghĩa. Hiệu của hai véc tơ n chiều $\vec{x}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và $\vec{y}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ là một véc tơ n chiều, kí hiệu là $\vec{x} - \vec{y}$ được xác định như sau:

$$\vec{x} - \vec{y} = \vec{x} + (-\vec{y}) = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n).$$

Ví dụ. Cho hai véc tơ $\vec{x}(3; -1; 5; 3)$ và $\vec{y}(0; 5; 4; 5)$, khi đó ta có $\vec{x} - \vec{y} = (3; -6; 1; -2)$.

3. Không gian véc tơ số học n chiều, không gian con

3.1. Không gian véc tơ số học n chiều

Định nghĩa. Không gian véc tơ số học n chiều là tập hợp tất cả các véc tơ n chiều, trong đó phép cộng véc tơ và phép nhân véc tơ với một số được xác định và thoả mãn 8 tính chất như trên.

Kí hiệu không gian véc tơ số học n chiều là R^n.

3.2. Không gian con

3.2.1. Định nghĩa. Cho R^n là không gian véc tơ số học n chiều và $V \neq \phi$ là một tập con của

R^n. Nếu với phép cộng véc tơ và phép nhân véc tơ với một số, V cũng là một không gian véc tơ thì ta gọi V là một không gian con của R^n.

3.2.2. Điều kiện để V là không gian con của R^n

Định lí. Cho R^n là không gian véc tơ số học n chiều và $V \neq \phi$ là một tập con của R^n. Điều kiện cần và đủ để V là không gian véc tơ con của R^n là :

i. V kín đối với phép cộng véc tơ, tức là với hai véc tơ $\vec{x}, \vec{y}$ bất kỳ thuộc V ta luôn có $\vec{x} + \vec{y} \in V$.

ii. V kín đối với phép nhân véc tơ với một số, tức là với mọi véc tơ $\vec{x} \in V$ và mọi số α ta có $\alpha.\vec{x} \in V$.

Ví dụ 1. Bản thân R^n cũng là một không gian con của R^n và tập hợp một véc tơ không cũng là một không gian con của R^n.

Ví dụ 2. Trong không gian 3 chiều R^3 ta xét tập hợp $V = \{\vec{x}(x_1; x_2; x_3): ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0\}$, trong đó a, b, c là các số thực cho trước là một không gian con của R^3.

Thậy vậy, với $\vec{x}(x_1; x_2; x_3)$, $\vec{y}(y_1; y_2; y_3) \in V$ ta có $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$, $ay_1 + by_2 + cy_3 = 0$,

suy ra $a(x_1 + y_1) + b(x_2 + y_2) + c(x_3 + y_3) = (ax_1 + bx_2 + cx_3) + (ay_1 + by_2 + cy_3) = 0$. Điều này chứng tỏ $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \in V$.

Lại có $a(\alpha x_1) + b(\alpha x_2) + c(\alpha x_3) = \alpha(ax_1 + bx_2 + cx_3) = 0$, suy ra $\alpha.\vec{x} \in V$ với α là một số thực bất kỳ.

Vậy theo định lý trên ta có điều phải chứng minh.

§2. Các mối liên hệ tuyến tính trong không gian véc tơ

1. Khái niệm tổ hợp tuyến tính và phép biểu diễn tuyến tính

1.1. Khái niệm tổ hợp tuyến tính

Định nghĩa. Trong không gian R^n cho m véc tơ $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_m$ và m số thực bất kỳ $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$. Khi đó ta gọi tổng $\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + ... + \alpha_m\vec{x}_m$ là một tổ hợp tuyến tính của các véc tơ $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_m$. Các số $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ được gọi là các hệ số của tổ hợp tuyến tính đó.

Từ các véctơ $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_m$ ta c ó thể lập được vô số các tổ hợp tuyến tính (mỗi bộ hệ số $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ cho tương ứng một tổ hợp tuyến tính của chúng) và mỗi tổ hợp tuyến tính của các véc tơ $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_m$ là một véc tơ n chiều.

Dễ thấy rằng:

i. Tổng hai tổ hợp tuyến tính bất kỳ của các véc tơ $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_m$ là một tổ hợp tuyến tính của các véctơ đó.

$$(\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\ldots+\alpha_m\vec{x}_m)+(\beta_1\vec{x}_1+\beta_2\vec{x}_2+\ldots+\beta_m\vec{x}_m)=$$

$$=(\alpha_1+\beta_1)\vec{x}_1+(\alpha_2+\beta_2)\vec{x}_2+\ldots+(\alpha_m+\beta_m)\vec{x}_m.$$

ii. Tích của một tổ hợp tuyến tính bất kỳ của các véc tơ $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_m$ với một số β bất kỳ là một tổ hợp tuyến tính của các véc tơ đó.

$$\beta(\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\ldots+\alpha_m\vec{x}_m)=(\beta.\alpha_1)\vec{x}_1+(\beta.\alpha_2)\vec{x}_2+\ldots+(\beta.\alpha_m)\vec{x}_m$$

Từ hai tính chất trên ta có định lý sau:

Định lí. Tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính của các véc tơ n chiều $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_m$ cho trước là một không gian con của không gian R^n.

1.2. Phép biểu diễn tuyến tính

Định nghĩa. Ta nói rằng véc tơ $\vec{x}\in R^n$ biểu diễn tuyến tính qua các véc tơ $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_m$ khi và chỉ khi tồn tại một tổ hợp tuyến tính của các véc tơ $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_m$ bằng $\vec{x}$, tức là tồn tại các số thực $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ sao cho:

$$\vec{x}=\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\ldots+\alpha_m\vec{x}_m$$

Đặc biệt, nếu véc tơ $\vec{x}$ biểu diễn tuyến tính qua một véc tơ $\vec{y}$ ($\vec{x}=\alpha.\vec{y}$) thì ta nói véc tơ $\vec{x}$ tỷ lệ với véc tơ $\vec{y}$.

Ví dụ. Với $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_m$ là các véc tơ n chiều bất kỳ ta luôn có $\vec{\theta}_n = 0.\vec{x}_1 + 0.\vec{x}_2 + ... + 0.\vec{x}_m$, ta gọi tổ hợp tuyến tính trên là tổ hợp tuyến tính tầm thường.

Định lí. Nếu véc tơ $\vec{x}$ biểu diễn tuyến tính qua các véc tơ $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_m$ và mỗi véc tơ $\vec{x}_i\ (i = \overline{1;m})$ biểu diễn tuyến tính qua các véc tơ $\vec{y}_1, \vec{y}_2, ..., \vec{y}_p$ thì $\vec{x}$ biểu diễn tuyến tính qua các véc tơ $\vec{y}_1, \vec{y}_2, ..., \vec{y}_p$.

Chứng minh.

Từ giả thiết ta có $\vec{x}$ bằng một tổ hợp tuyến tính nào đó của các véc tơ, tức là:

$$\vec{x} = \alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + ... + \alpha_m\vec{x}_m$$

Do các véc tơ $\vec{x}_i\ (i = \overline{1;m})$ biểu diễn tuyến tính qua $\vec{y}_1, \vec{y}_2, ..., \vec{y}_p$ nên mỗi véc tơ $\alpha_i.\vec{x}_i\ (i = \overline{1;m})$ là một tổ hợp tuyến tính của $\vec{y}_1, \vec{y}_2, ..., \vec{y}_p$, do đó $\vec{x}$ là biểu diễn tuyến tính qua các véc tơ $\vec{y}_1, \vec{y}_2, ..., \vec{y}_p$.

2. Độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính

2.1. Định nghĩa. Trong không gian véc tơ R^n, ta gọi hệ véc tơ $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_m$ là độc lập tuyến tính nếu hệ thức $\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + ... + \alpha_m\vec{x}_m = \vec{\theta}_n$ chỉ xảy ra khi $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_m = 0$. Ngược lại, nếu tồn tại $\alpha_i \neq 0$ nào đó để $\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + ... + \alpha_m\vec{x}_m = \vec{\theta}_n$ thì ta nói hệ véc tơ $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_m$ là phụ thuộc tuyến tính.

Ví dụ. Trong không gian R^2 cho hệ 3 véc tơ $\vec{x}_1(2; 0)$, $\vec{x}_2(0; 4)$, $\vec{x}_3(4; 4)$ thì dễ thấy hệ $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ là độc lập tuyến tính, hệ ba véc tơ $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ là phụ thuộc tuyến tính vì $2.\vec{x}_1 + \vec{x}_2 - \vec{x}_3 = \theta$.

2.2. Các tính chất

2.2.1. Hệ gồm một véc tơ $\{\vec{x}_1\}$ chỉ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi $\{\vec{x}_1\} = \vec{\theta}$.

Thậy vậy, vì $1.\vec{\theta} = \vec{\theta}$ nên hệ $\{\vec{x}_1\}$ phụ thuộc tuyến tính. Ngược lại, giả sử hệ $\{\vec{x}_1\}$ phụ thuộc tuyến tính thì có $\alpha \neq 0$ để $\alpha.\vec{x}_1 = \vec{\theta}$, suy ra $\vec{x}_1 = \vec{\theta}$.

2.2.2. Với m > 1, hệ m véc tơ $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_m$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi một véc tơ nào đó của hệ biểu thị tuyến tính được qua các véc tơ còn lại.

Thậy vậy, giả sử hệ $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_m$ là phụ thuộc tuyến tính, khi đó tồn tại các $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ không đồng thời bằng không sao cho

$\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + ... + \alpha_m\vec{x}_m = \vec{\theta}_n$. Không mất tính tổng quát ta giả sử $\alpha_1 \neq 0$ khi đó ta có $\vec{x}_1$ biểu diễn tuyến tính được qua các véc tơ còn lại, tức là:

$$\vec{x}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{x}_2 - ... - \frac{\alpha_m}{\alpha_1}\vec{x}_m$$

Ngược lại, giả sử một véctơ nào đó của hệ $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_m$ biểu diễn tuyến tính được qua các véc tơ còn lại, không giảm tổng tổng quát ta giả sử là $\vec{x}_1$, tức là:

$$\vec{x}_1 = \alpha_2\vec{x}_2 + ... + \alpha_m\vec{x}_m$$

$$\Leftrightarrow \quad (-1)\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + ... + \alpha_m\vec{x}_m = \vec{\theta}_n,$$

tổ hợp tuyến tính ở vế trái có $\alpha_1 = -1 \neq 0$, do đó hệ $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_m$ là phụ thuộc tuyến tính.

2.2.3. Mỗi hệ con của hệ véc tơ độc lập tuyến tính cũng là một hệ véc tơ độc lập tuyến tính.

2.2.4. Mỗi hệ véc tơ chứa một hệ con phụ thuộc tuyến tính cũng là một hệ véc tơ phụ thuộc tuyến tính. Nói riêng, mỗi hệ có chứa véc tơ $\vec{\theta}$ đều phụ thuộc tuyến tính.

2.2.5. Giả sử hệ $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_m$ độc lập tuyến tính, khi đó hệ $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_m, \vec{\beta}$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi véc tơ $\vec{\beta}$ biểu thị tuyến tính được qua hệ $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_m$ và biểu diễn đó là duy nhất.

2.2.6. Mọi hệ véc tơ n chiều với số véc tơ lớn hơn n đều phụ thuộc tuyến tính.

§3. Cơ sở của không gian véc tơ

1. Khái niệm cơ sở của không gian véc tơ

Định nghĩa. Mỗi hệ véc tơ n chiều độc lập tuyến tính và có số véc tơ đúng bằng n được gọi là một cơ sở của không gian R^n.

Ví dụ. Trong không gian R^3 mọi hệ gồm 3 véc tơ không đồng phẳng là một cơ sở của nó.

Định lí. Giả sử $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n\}$ là một cơ sở trong không gian véc tơ R^n. Khi đó, mọi véctơ $\vec{x} \in R^n$ đều biểu diễn được duy nhất được dưới dạng một tổ hợp tuyến tính là:

$$\vec{x} = \alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + ... + \alpha_n\vec{x}_n,\ \alpha_i \in R \text{ với mọi } i = \overline{1;n}.$$

2. Tọa độ của véc tơ trong một cơ sở

Cho một cơ sở của không gian R^n là:

$$\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n\} \qquad (6.2.1)$$

Khi đó, mỗi véc tơ $\vec{x} \in R^n$ cho tương ứng duy nhất một bộ n số thực có thứ tự $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ thoả mãn hệ thức:

$$\vec{x} = \alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + ... + \alpha_n\vec{x}_n \qquad (6.2.2)$$

Định nghĩa. Bộ n số thực có thứ tự $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ thoả mãn hệ thức (6.2.2) được gọi là tọa độ của véc tơ $\vec{x}$ trong cơ sở (6.2.1).

Ví dụ. Cho hệ 3 véc tơ $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ với $\vec{x}_1(1;2;1), \vec{x}_2(2;9;0), \vec{x}_3(3;3;4)$ là một cơ sở trong R^3. Hãy tìm tọa độ của véctơ $\vec{v}(5;-1;9)$ đối với cơ sở $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$.

Giả sử $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ là tọa độ của véc tơ $\vec{v}(5;-1;9)$ đối với cơ sở $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$, tức là:

$$\vec{v} = \alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \alpha_3\vec{x}_3$$

$$\Leftrightarrow (5;-1;9) = \alpha_1(1;2;1) + \alpha_2(2;9;0) + \alpha_3(3;3;4)$$

$$\Leftrightarrow (5;-1;9) = (\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3; 2\alpha_1 + 9\alpha_2 + 3\alpha_3; \alpha_1 + 4\alpha_3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 5 \\ 2\alpha_1 + 9\alpha_2 + 3\alpha_3 = -1 \\ \alpha_1 + 4\alpha_3 = 9 \end{cases}.$$

giải hệ này ta được $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1; -1; 2)$.

Vậy toạ độ của véc tơ $\vec{v}(5;-1;9)$ đối với cơ sở $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ là (1; -1; 2).

3. Cơ sở của không gian con

Cho V là một không gian con của không gian R^n. Hệ véc tơ $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_r\}$ của không gian con V được gọi là một cơ cở của nó nếu thoả mãn hai điều kiện sau:

i. $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_r\}$ độc lập tuyến tính

ii. Mọi véc tơ $\vec{x} \in V$ đều biểu diễn tuyến tính qua $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_r\}$.

Ví dụ. Trong không gian R^3 xét tập hợp V gồm tất cả các véc tơ có cao độ bằng không, tức là:

$$V = \{\vec{x} | \vec{x} = (x_1; x_2; 0)\}$$

a. Chứng minh V là một không gian con của R^3

b. Tìm một cơ sở của không gian con V.

Giải.

a. Ta có $\vec{x}(1;1;0) \in V$ nên ta có $V \neq \phi$.

Giả sử $\vec{x}, \vec{y}$ là hai véc tơ bất kỳ thuộc V và λ là một số thực bất kỳ, tức là:

$$\vec{x} = (x_1; x_2; 0), \vec{y} = (y_1; y_2; 0).$$

Khi đó ta có

$\vec{x} + \vec{y} = (x_1; x_2; 0) + (y_1; y_2; 0) = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; 0) \in V,$

$\lambda.\vec{x} = (\lambda x_1; \lambda x_2; 0) \in V.$

Theo định nghĩa không gian con ta có điều phải chứng minh.

b. Giả sử $\vec{x}(x_1; x_2; 0)$ là véc tơ bất kỳ thuộc V, khi đó ta luôn có:

$$\vec{x}(x_1; x_2; 0) = x_1(1; 0; 0) + x_2(0; 1; 0)$$

dễ thấy $\vec{e}_1(1;0;0)$ và $\vec{e}_2(0;1;0)$ là hai véc tơ thuộc V và độc lập tuyến tính. Vậy theo định nghĩa ta có $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2\}$ là một cơ sở của V.

Bài tập chương 6

1. Trong không gian véc tơ R^3 các tập sau có phải là không gian véc tơ con không?

a. $A = \{(x_1; x_2; x_3) | x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

b. $B = \{(x_1; x_2; x_3) | x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$

c. $C = \{(x_1; x_2; x_3) | 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, x_1 + x_2 - 4x_3 = 0\}$

d. $D = \{(x_1; x_2; x_3) | x_1 = 0\}$

e. $D = \{(x_1; x_2; x_3) | x_2 = 0\}$

2. Tìm số λ để véc tơ $\vec{x}$ biểu diễn được qua các véc tơ còn lại

a. $\vec{x}(2;-1;\lambda)$, $\vec{x}_1(4;3;2)$, $\vec{x}_2(-1;-1;-3)$

b. $\vec{x}(1;3;5)$, $\vec{x}_1(3;2;5)$, $\vec{x}_2(2;4;7)$, $\vec{x}_3(5;6;\lambda)$

c. $\vec{x}(\lambda;2;5)$, $\vec{x}_1(3;2;6)$, $\vec{x}_2(7;3;9)$, $\vec{x}_3(5;1;3)$

3. Xét sự độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính của các hệ véc tơ sau

a. $\vec{x}_1(1;-1;0)$, $\vec{x}_2(-2;1;-1)$, $\vec{x}_3(-3;2;-1)$

b. $\vec{x}_1(1;-1;1;-1)$, $\vec{x}_2(2;1;0;-1)$, $\vec{x}_3(3;-6;5;-4)$

c. $\vec{x}_1(1;2;3;4)$, $\vec{x}_2(2;3;4;1)$, $\vec{x}_3(3;4;1;2)$, $\vec{x}_4(4;1;2;3)$

4. Chứng minh rằng $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ là cơ sở của R^3 và tìm tọa độ của $\vec{y}$ trong cơ sở đó biết rằng:

a. $\vec{y}(15;3;1)$, $\vec{x}_1(2;1;1)$, $\vec{x}_2(6;2;0)$, $\vec{x}_3(7;0;7)$

b. $\vec{y}(2;3;0)$, $\vec{x}_1(0;1;1)$, $\vec{x}_2(3;2;0)$, $\vec{x}_3(1;0;1)$

c. $\vec{y}(3;-3;2)$, $\vec{x}_1(1;-1;0)$, $\vec{x}_2(0;1;-1)$, $\vec{x}_3(1;0;1)$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Lê Đình Thuý, Toán cao cấp cho các nhà kinh tế phần 1, NXB Thống kê, 2003;

[2]. Lê Đình Thuý, Toán cao cấp cho các nhà kinh tế phần 2, NXB Thống kê, 2004;

[3]. Nguyễn Đình Trí (Chủ biên), Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh, Toán học cao cấp tập 1, NXB Giáo dục; 2006;

[4]. Nguyễn Đình Trí (Chủ biên), Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh, Toán học cao cấp tập 2, NXB Giáo dục; 2004;

[5]. Nguyễn Đình Trí (Chủ biên), Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh, Toán học cao cấp tập 3, NXB Giáo dục; 2005;

[6] Trần Đình Thi, Trần Đức Khánh, Hoàng Minh Văn, Toán cao cấp, NXB Lao động xã hội – Xã hội, 2006;

[7]. Phan Hồng Trường, Giáo trình Đại số tuyến tính, Trường ĐH sư phạm Hà Nội 2, 2001;

[8]. Nguyễn Văn Huân, Toán cao cấp, Trường Đại học Thuỷ lợi, năm 1996;

[9]. Tống Đình Quỳ, Nguyễn Cảnh Lương, Giúp ôn tập tốt Toán cao cấp tập 4, NXB Đại học quốc gia Hà Nội, 2001;

[10]. Khu Quốc Anh, Nguyễn Anh Kiệt, Tạ Mân, Nguyễn Doãn Tuấn, Bài tập Đại số tuyến tính và hình học giải tích. NXB Đại học quốc gia Hà nội, 2001.

TOÁN CAO CẤP

=====*=====

Chịu trách nhiệm Xuất bản:

HÀ TẤT THẮNG

Biên tập nội dung:

TÁC GIẢ

Trình bày bìa:

NGÂN HÀ

Chế bản Vi tính:

NHẬT LỆ

In 1.000 cuốn, khổ 14,5x20,5cm tại Trung tâm Nghiên cứu và Sản xuất Học liệu. 136 Xuân Thủy - Cầu Giấy - Hà Nội. Số đăng ký kế hoạch xuất bản số 409-2008/CXB/54-113/LĐXH.

In xong và nộp lưu chiểu tháng 06 năm 2008.